5.36 1) Pour déterminer l'intersection de la droite $y = m\,x + h$ avec l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} y = m\,x + h \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

En substituant $y = m\,x + h$ dans l'équation de l'hyperbole, on obtient :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(m\,x+h)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2\,x^2+2\,h\,m\,x+h^2}{b^2} = 1$

$b^2\,x^2 - a^2\,m^2\,x^2 - 2\,a^2\,h\,m\,x - a^2\,h^2 = a^2\,b^2$

$(a^2\,m^2 - b^2)\,x^2 + 2\,a^2\,h\,m\,x + a^2\,(h^2 + b^2) = 0$

2) Cette équation admet une solution unique si :

$$\begin{aligned} 0 = \Delta &= (2\,a^2\,h\,m)^2 - 4\,(a^2\,m^2 - b^2)\,a^2\,(h^2 + b^2) \\ &= 4\,a^4\,h^2\,m^2 - 4\,a^4\,h^2\,m^2 - 4\,a^4\,b^2\,m^2 + 4\,a^2\,b^2\,h^2 + 4\,a^2\,b^4 \\ &= -4\,a^4\,b^2\,m^2 + 4\,a^2\,b^2\,h^2 + 4\,a^2\,b^4 \\ &= -4\,a^2\,b^2\,(-a^2\,m^2 + h^2 + b^2) \end{aligned}$$

Étant donné que $a^2\,b^2 > 0$, $\Delta = 0$ si $-a^2\,m^2 + h^2 + b^2 = 0 \iff h^2 = a^2\,m^2 - b^2 \iff h = \pm\sqrt{a^2\,m^2 - b^2}$.

3) Une droite $y = m\,x + h$ de pente m est tangente à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ seulement si elle possède un unique point d'intersection avec celle-ci.

Cette condition étant satisfaite lorsque $h = \pm\sqrt{a^2\,m^2 - b^2}$, on conclut que l'équation de la tangente doit être $y = m\,x \pm \sqrt{a^2\,m^2 - b^2}$.