5.37 1) $9\,x^2 - 4\,y^2 + 144 = 0$

$$\frac{4\,y^2}{144} - \frac{9\,x^2}{144} = \frac{y^2}{\frac{144}{4}} - \frac{x^2}{\frac{144}{9}} = \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = y \\ y^\star = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^\star \\ y = x^\star \end{cases}$$

l'équation de l'hyperbole s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{36} - \dfrac{y^{\star 2}}{16} = 1\,.$

Une droite $y = \frac{15}{26}\,x + h$ de pente $\frac{15}{26}$ dans le repère $\mathcal{R}$ devient dans le repère $\mathcal{R}^\star$:

$y = \frac{15}{26}\,x + h \iff x^\star = \frac{15}{26}\,y^\star + h \iff y^\star = \frac{26}{15}\,x^\star - \frac{26}{15}\,h$

c'est-à-dire une droite de pente $\frac{26}{15}$.

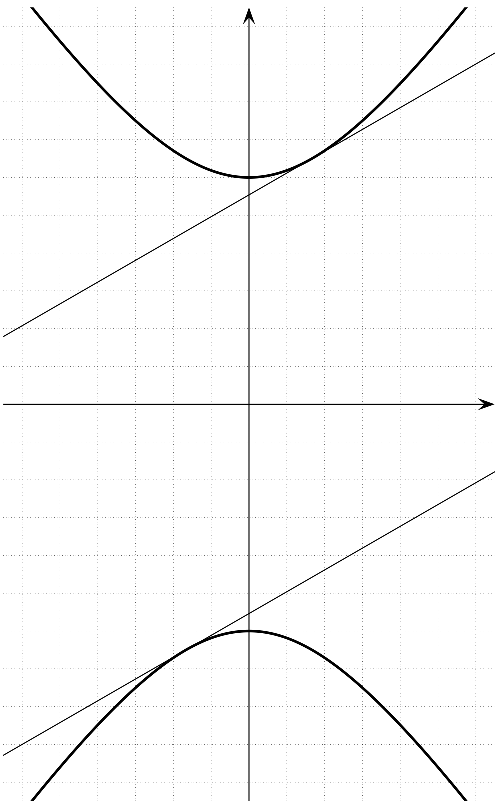
Dans le repère $\mathcal{R}^\star$, les tangentes de pente $\frac{26}{15}$ à l'hyperbole $\frac{x^{\star 2}}{36} - \frac{y^{\star 2}}{16} = 1$ sont données par la formule :

$y^\star = \frac{26}{15}\,x^\star \pm \sqrt{36 \cdot \left(\frac{26}{15}\right)^2 - 16} = \frac{26}{15}\,x^\star \pm \sqrt{\frac{2304}{25}} = \frac{26}{15}\,x^\star \pm \frac{48}{5}$

Retranscrivons les équations de ces tangentes dans le repère $\mathcal{R}$:

(a) $y^\star = \frac{26}{15}\,x^\star + \frac{48}{5} \iff x = \frac{26}{15}\,y + \frac{48}{5} \iff y = \frac{15}{26}\,x - \frac{15}{26} \cdot \frac{48}{5} = \frac{15}{26}\,x - \frac{72}{13}$
$\iff 15\,x - 26\,y - 144 = 0$

(b) $y^\star = \frac{26}{15}\,x^\star - \frac{48}{5} \iff x = \frac{26}{15}\,y - \frac{48}{5} \iff y = \frac{15}{26}\,x + \frac{15}{26} \cdot \frac{48}{5} = \frac{15}{26}\,x + \frac{72}{13}$
$\iff 15\,x - 26\,y + 144 = 0$



2) $9\,x^2+48\,y^2-432=0$

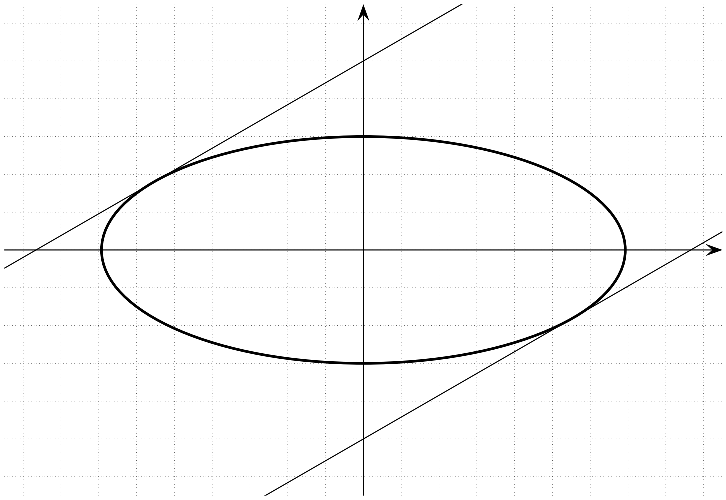
$$\frac{9\,x^2}{432}+\frac{48\,y^2}{432}=\frac{x^2}{\frac{432}{9}}+\frac{y^2}{\frac{432}{48}}=\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{9}=1$$

Les tangentes de pente $\frac{\sqrt{3}}{3}$ à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{9}=1$ sont données par la formule :

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\,x\pm\sqrt{48\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+9}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,x\pm\sqrt{25}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,x\pm 5$

(a) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\,x+5\iff y=\frac{1}{\sqrt{3}}\,x+5\iff x-\sqrt{3}\,y+5\,\sqrt{3}=0$

(b) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\,x-5\iff y=\frac{1}{\sqrt{3}}\,x-5\iff x-\sqrt{3}\,y-5\,\sqrt{3}=0$



3) $x^2-4\,x+9\,y^2+9\,y=0$

$x^2-4\,x+9\,(y^2+y)=0$

$(x-2)^2-4+9\left((y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\right)=0$

$(x-2)^2+9\,(y+\frac{1}{2})^2=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{25}{4}}+\frac{9\,(y+\frac{1}{2})^2}{\frac{25}{4}}=\frac{(x-2)^2}{\frac{25}{4}}+\frac{(y+\frac{1}{2})^2}{\frac{25}{36}}=1$$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases}x^\star=x-2\\ y^\star=y+\frac{1}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}x=x^\star+2\\ y=y^\star-\frac{1}{2}\end{cases}$$

l'équation de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{\frac{25}{4}}+\dfrac{y^{\star 2}}{\frac{25}{36}}=1\,.$

Une droite $y=\frac{4}{9}\,x+h$ de pente $\frac{4}{9}$ dans le repère $\mathcal{R}$ demeure une droite de pente $\frac{4}{9}$ dans le repère $\mathcal{R}^\star$, étant donné que :

$y=\frac{4}{9}\,x+h\iff y^\star-\frac{1}{2}=\frac{4}{9}\,(x^\star+2)+h\iff y^\star=\frac{4}{9}\,x^\star+h+\frac{25}{18}\,.$

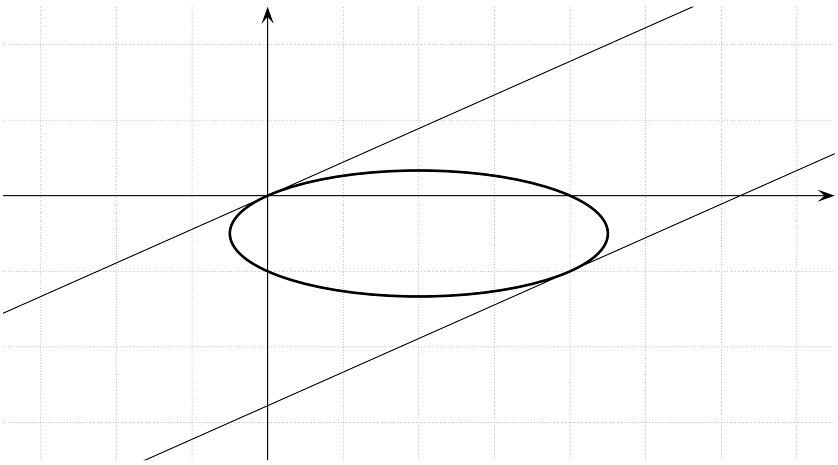
Dans le repère $\mathcal{R}^\star$, les tangentes de pente $\frac{4}{9}$ à l'ellipse $\dfrac{x^{\star 2}}{\frac{25}{4}}+\dfrac{y^{\star 2}}{\frac{25}{36}}=1$ s'obtiennent grâce à la formule :

$y^\star = \frac{4}{9}\,x^\star \pm \sqrt{\frac{25}{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{25}{36}} = \frac{4}{9}\,x^\star \pm \sqrt{\frac{100}{81} + \frac{25}{36}} = \frac{4}{9}\,x^\star \pm \sqrt{\frac{625}{324}} = \frac{4}{9}\,x^\star \pm \frac{25}{18}$

Retranscrivons les équations de ces tangentes dans le repère $\mathcal{R}$:

(a) $y^\star = \frac{4}{9}\,x^\star + \frac{25}{18} \iff y + \frac{1}{2} = \frac{4}{9}\,(x-2) + \frac{25}{18} \iff y = \frac{4}{9}\,x$
$\iff 4\,x - 9\,y = 0$

(b) $y^\star = \frac{4}{9}\,x^\star - \frac{25}{18} \iff y + \frac{1}{2} = \frac{4}{9}\,(x-2) - \frac{25}{18} \iff y = \frac{4}{9}\,x - \frac{25}{9}$
$\iff 4\,x - 9\,y - 25 = 0$



4) $x^2 - 6\,y^2 + 12\,y - 18 = 0$

$x^2 - 6\,(y^2 - 2\,y) - 18 = 0$

$x^2 - 6\,\big((y-1)^2 - 1\big) - 18 = 0$

$x^2 - 6\,(y-1)^2 = -6 + 18 = 12$

$\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{(y-1)^2}{2} = 1$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = x \\ y^\star = y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x^\star \\ y = y^\star + 1 \end{cases}$$

l'équation de l'hyperbole devient $\dfrac{x^{\star 2}}{12} - \dfrac{y^{\star 2}}{2} = 1\,.$

Une droite $y = \frac{1}{2}\,x + h$ de pente $\frac{1}{2}$ dans le repère $\mathcal{R}$ demeure une droite de pente $\frac{1}{2}$ dans le repère $\mathcal{R}^\star$, vu que :
$y = \frac{1}{2}\,x + h \iff y^\star + 1 = \frac{1}{2}\,x^\star + h \iff y^\star = \frac{1}{2}\,x^\star + h - 1\,.$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$, les tangentes de pente $\frac{1}{2}$ à l'hyperbole $\frac{x^{\star 2}}{12} - \frac{y^{\star 2}}{2} = 1$ sont données par la formule :

$y^\star = \frac{1}{2}\,x^\star \pm \sqrt{12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2} = \frac{1}{2}\,x^\star \pm \sqrt{1} = \frac{1}{2}\,x^\star \pm 1$

Dans le repère $\mathcal{R}$, les équations de ces tangentes deviennent :

(a) $y^\star = \frac{1}{2}\,x^\star + 1 \iff y - 1 = \frac{1}{2}\,x + 1 \iff y = \frac{1}{2}\,x + 2$

$\iff x - 2\,y + 4 = 0$

(b) $y^\star = \frac{1}{2}\,x^\star - 1 \iff y - 1 = \frac{1}{2}\,x - 1 \iff y = \frac{1}{2}\,x \iff x - 2\,y = 0$