5.38 1) $x^2 + 2\,y^2 - 17 = 0$

$$\frac{x^2}{17} + \frac{2\,y^2}{17} = \frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{\frac{17}{2}} = 1$$

Les tangentes de pente m à l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{17} + \dfrac{y^2}{\frac{17}{2}} = 1$ sont données par la formule $y = m\,x \pm \sqrt{17\,m^2 + \frac{17}{2}}$.

Par ailleurs, ces tangentes doivent passer par le point $\mathrm{P}(-1\,;5)$:

$5 = m \cdot (-1) \pm \sqrt{17\,m^2 + \frac{17}{2}}$

$5 + m = \pm\sqrt{17\,m^2 + \frac{17}{2}}$

$(5+m)^2 = 17\,m^2 + \frac{17}{2}$

$32\,m^2 - 20\,m - 33 = 0$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 32 \cdot (-33) = 4624 = 68^2$

(a) $m = \frac{-(-20)+68}{2\cdot 32} = \frac{11}{8}$

L'équation de la tangente s'écrit ainsi : $y = \frac{11}{8}\,x + h$.

Vu qu'elle passe par le point $\mathrm{P}(-1\,;5)$, on doit avoir $5 = \frac{11}{8} \cdot (-1) + h$, d'où suit $h = 5 + \frac{11}{8} = \frac{51}{8}$.

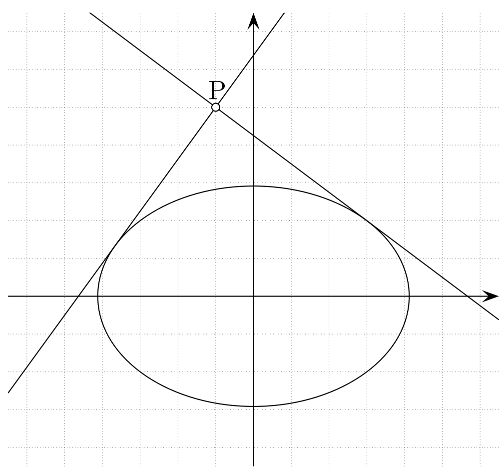
L'équation de la tangente est par conséquent :
$y = \frac{11}{8}\,x + \frac{51}{8} \iff 11\,x - 8\,y + 51 = 0$

(b) $m = \frac{-(-20)-68}{2\cdot 32} = -\frac{3}{4}$

L'équation de la tangente est de la forme $y = -\frac{3}{4}\,x + h$.

Attendu qu'elle passe par le point $\mathrm{P}(-1\,;5)$, on obtient $5 = -\frac{3}{4} \cdot (-1) + h$, de sorte que $h = 5 - \frac{3}{4} = \frac{17}{4}$.

Il en résulte que la tangente admet pour équation :
$y = -\frac{3}{4}\,x + \frac{17}{4} \iff 3\,x + 4\,y - 17 = 0$



2) $y^2+4\,x-6\,y=0$

$y^2-6\,y=-4\,x$

$(y-3)^2-9=-4\,x$

$(y-3)^2=-4\,x+9=4\left(-x+\frac{9}{4}\right)$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = -x+\frac{9}{4} \\ y^\star = y-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -x^\star+\frac{9}{4} \\ y = y^\star+3 \end{cases}$$

l'équation de la parabole s'écrit $y^{\star 2}=4\,x^\star$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$, les coordonnées du point $\mathrm{P}(-\frac{3}{2}\,;-1)$ deviennent :

$$\begin{cases} x^\star_{\mathrm{P}} = -x_{\mathrm{P}}+\frac{9}{4} = -(-\frac{3}{2})+\frac{9}{4} = \frac{15}{4} \\ y^\star_{\mathrm{P}} = y_{\mathrm{P}}-3 = -1-3 = -4 \end{cases} \quad \text{d'où } \mathrm{P}^\star(\tfrac{15}{4}\,;-4)$$

L'équation de la tangente de pente m à la parabole d'équation $y^{\star 2}=4\,x^\star$ s'obtient grâce à la formule $y^\star=m\,x^\star+\frac{p}{2\,m}=m\,x^\star+\frac{2}{2\,m}=m\,x^\star+\frac{1}{m}$.

Vu que la tangente doit passer par le point $\mathrm{P}^\star(\frac{15}{4}\,;-4)$, on trouve :

$-4=m\cdot\frac{15}{4}+\frac{1}{m}$

$0=\frac{15}{4}\,m+4+\frac{1}{m}=\frac{15\,m^2+16\,m+4}{4\,m}$

$\Delta=16^2-4\cdot 15\cdot 4=16=4^2$

(a) $m=\frac{-16+4}{2\cdot 15}=-\frac{2}{5}$

L'équation de la tangente s'écrit $y^\star=-\frac{2}{5}\,x^\star+h$.

Vu qu'elle doit passer par le point $\mathrm{P}^\star(\frac{15}{4}\,;-4)$, on doit avoir : $-4=-\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{4}+h$, si bien que $h=-4+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{4}=-\frac{5}{2}$.

L'équation de la tangente est par conséquent $y^\star=-\frac{2}{5}\,x^\star-\frac{5}{2}$.

(b) $m=\frac{-16-4}{2\cdot 15}=-\frac{2}{3}$

L'équation de la tangente est de la forme $y^\star=-\frac{2}{3}\,x^\star+h$.

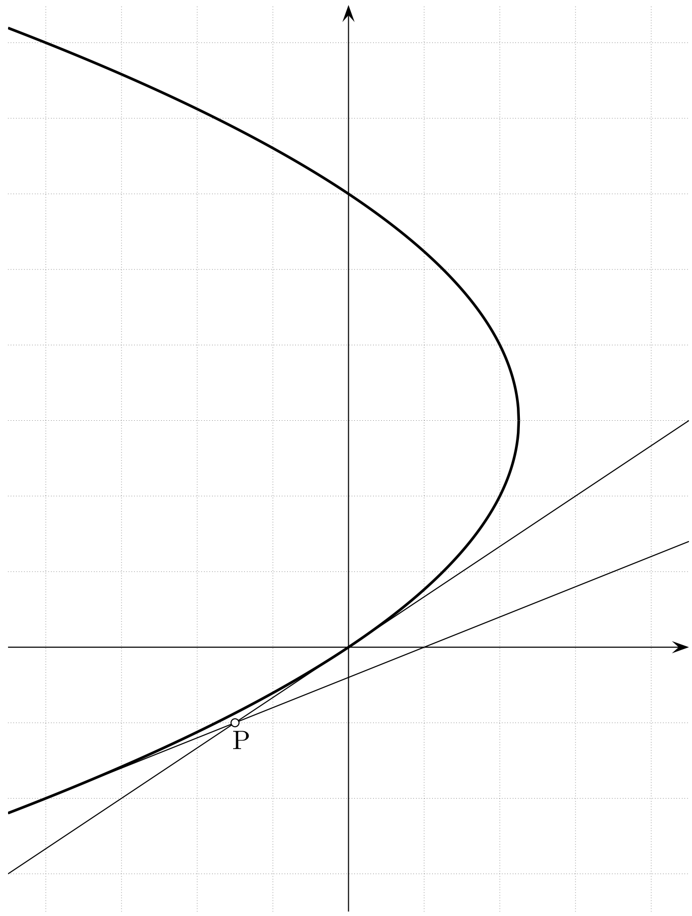
Étant donné qu'elle doit passer par le point $\mathrm{P}^\star(\frac{15}{4}\,;-4)$, il suit que $-4=-\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{4}+h$, de sorte que $h=-4+\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{4}=-\frac{3}{2}$.

Dès lors, l'équation de la tangente est $y^\star=-\frac{2}{3}\,x^\star-\frac{3}{2}$.

Il reste à exprimer les équations de ces tangentes dans le repère $\mathcal{R}$:

(a) $y^\star=-\frac{2}{5}\,x^\star-\frac{5}{2} \iff y-3=-\frac{2}{5}\,(-x+\frac{9}{4})-\frac{5}{2} \iff y=\frac{2}{5}\,x-\frac{2}{5}$
$\iff 2\,x-5\,y-2=0$

(b) $y^\star=-\frac{2}{3}\,x^\star-\frac{3}{2} \iff y-3=-\frac{2}{3}\,(-x+\frac{9}{4})-\frac{3}{2} \iff y=\frac{2}{3}\,x$
$\iff 2\,x-3\,y=0$



3) $x^2 + 2\,x - 3\,y^2 + 19 = 0$

$(x+1)^2 - 1 - 3\,y^2 + 19 = 0$

$(x+1)^2 - 3\,y^2 = -18$

$\dfrac{3\,y^2}{18} - \dfrac{(x+1)^2}{18} = \dfrac{y^2}{\frac{18}{3}} - \dfrac{(x+1)^2}{18} = \dfrac{y^2}{6} - \dfrac{(x+1)^2}{18} = 1$

Dans le repère $\mathcal{R}^\star$ défini par les relations

$$\begin{cases} x^\star = y \\ y^\star = x+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y^\star - 1 \\ y = x^\star \end{cases}$$

l'équation de l'hyperbole s'écrit $\dfrac{x^{\star 2}}{6} - \dfrac{y^{\star 2}}{18} = 1$.

Les coordonnées du point $\mathrm{P}(-1\,;2)$ deviennent dans le repère $\mathcal{R}^\star$:

$\begin{cases} x^\star_\mathrm{P} = y_\mathrm{P} = 2 \\ y^\star_\mathrm{P} = x_\mathrm{P} + 1 = -1+1 = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\mathrm{P}^\star(2\,;0)$

Les équations des tangentes de pente m à l'hyperbole $\frac{x^{\star 2}}{6} - \frac{y^{\star 2}}{18} = 1$ sont données par la formule $y^\star = m\,x^\star \pm \sqrt{6\,m^2 - 18}$.

Comme ces tangentes doivent passer par le point $\mathrm{P}^\star(2\,;0)$, il en résulte que :

$0 = m \cdot 2 \pm \sqrt{6\,m^2 - 18}$

$-2\,m = \pm\sqrt{6\,m^2 - 18}$

$(-2\,m)^2 = 6\,m^2 - 18$

$0 = 2\,m^2 - 18 = 2\,(m^2 - 9) = 2\,(m+3)\,(m-3)$

(a) Si $m = -3$, l'équation de la tangente est de la forme $y^\star = -3\,x^\star + h$.

Pour qu'elle passe par le point $\mathrm{P}^\star(2\,;0)$, il faut que $0 = -3 \cdot 2 + h$, c'est-à-dire $h = 6$.

L'équation de la tangente s'écrit par conséquent $y^\star = -3\,x^\star + 6$.

(b) Si $m = 3$, la tangente a une équation de la forme $y^\star = 3\,x^\star + h$.

Comme elle doit passer par le point $\mathrm{P}^\star(2\,;0)$, il apparaît que $0 = 3 \cdot 2 + h$, d'où suit que $h = -6$.

La tangente possède ainsi l'équation $y^\star = 3\,x^\star - 6$.

Il reste à restranscrire les équations de ces tangentes dans le repère $\mathcal{R}$:

(a) $y^\star = -3\,x^\star + 6 \iff x + 1 = -3\,y + 6 \iff x + 3\,y - 5 = 0$

(b) $y^\star = 3\,x^\star - 6 \iff x + 1 = 3\,y - 6 \iff x - 3\,y + 7 = 0$