5.6 1) $y^{\star 2} = 6\,x^\star$ est l'équation de la parabole de sommet $\mathrm{A}^\star(0\,;0)$, dont la directrice est parallèle à l'axe $\mathrm{O}y$, dont le demi-paramètre vaut $p = 3$ et dont le foyer est à droite du sommet.

En effectuant une rotation centrée à l'origine et d'angle 90°, c'est-à-dire en travaillant dans le repère $\mathcal{R}'$ défini par les relations

$$\begin{cases} x' = y^\star \\ y' = x^\star \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^\star = y' \\ y^\star = x' \end{cases}$$

on obtient l'équation de la parabole de sommet $\mathrm{A}'(0\,;0)$, dont la directrice est parallèle à l'axe $\mathrm{O}x$, dont le demi-paramètre vaut $p = 3$ et dont le foyer est au-dessus du sommet :

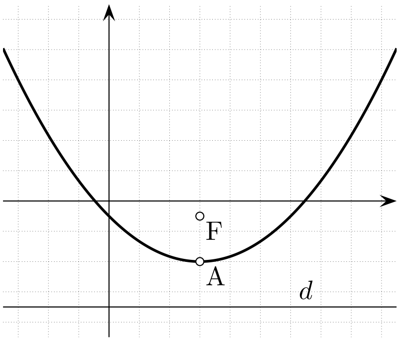
$y^{\star 2} = 6\,x^\star \iff x'^2 = 6\,y'$

Cette parabole satisfait les conditions de l'énoncé, sauf que le sommet doit être situé en $\mathrm{A}(3\,;-2)$ et non en $\mathrm{A}'(0\,;0)$. On obtient la parabole recherchée en utilisant le repère $\mathcal{R}$ défini par les relations

$$\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

Dans le repère $\mathcal{R}$, l'équation $x'^2 = 6\,y'$ de la parabole devient :

$(x - 3)^2 = 6\,(y + 2)$.



2) $y^{\star 2} = 12\,x^\star$ est l'équation de la parabole de sommet $\mathrm{A}^\star(0\,;0)$, dont la directrice est parallèle à l'axe $\mathrm{O}y$, dont le demi-paramètre vaut $p = 6$ et dont le foyer est à droite du sommet.

En effectuant une rotation centrée à l'origine et d'angle 90°, c'est-à-dire en travaillant dans le repère $\mathcal{R}'$ défini par les relations

$$\begin{cases} x' = y^\star \\ y' = x^\star \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^\star = y' \\ y^\star = x' \end{cases}$$

on obtient l'équation de la parabole de sommet $\mathrm{A}'(0\,;0)$, dont la directrice est parallèle à l'axe $\mathrm{O}x$, dont le demi-paramètre vaut $p = 6$ et dont le foyer est au-dessus du sommet :

$y^{\star 2} = 12\,x^\star \iff x'^2 = 12\,y'$

Pour que le foyer soit en-dessous du sommet, il faut effectuer une symétrie axiale d'axe $\mathrm{O}x$, ce qui revient à utiliser le repère $\mathcal{R}''$ défini par les relations

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = -y' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x'' \\ y' = -y'' \end{cases}$$

Dans le repère $\mathcal{R}''$, l'équation $x'^2 = 12\,y'$ de la parabole s'écrit :
$x''^2 = -12\,y''$.

Enfin, pour que toutes les conditions de l'énoncé soient satisfaites, il faut encore que le sommet soit $\mathrm{A}(-\frac{7}{3}\,;\frac{5}{2})$ au lieu de $\mathrm{A}''(0\,;0)$, ce qui revient à travailler dans le repère $\mathcal{R}$ défini par les relations

$$\begin{cases} x = x'' - \frac{7}{3} \\ y = y'' + \frac{5}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x'' = x + \frac{7}{3} \\ y'' = y - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Dans le repère $\mathcal{R}$, l'équation $x''^2 = -12\,y''$ de la parabole devient :
$(x + \frac{7}{3})^2 = -12\,(y - \frac{5}{2})$.