5.9 L'axe de la parabole étant parallèle à l'axe des ordonnées, sa directrice est parallèle à l'axe des abscisses. Il en résulte que l'équation de la parabole recherchée est de la forme

$$(x-a)^2 = 2\,p\,(y-b)$$

où $(a\,;b)$ désignent les coordonnées du sommet de la parabole.

1^re^ méthode

Puisqu'elle passe par le point $\mathrm{A}(6\,;2)$, on doit avoir :
$(6-a)^2 = 2\,p\,(2-b)$, c'est-à-dire $36 - 12\,a + a^2 = 4\,p - 2\,b\,p$.

Vu que le point $\mathrm{B}(-6\,;-2)$ appartient à la parabole, on doit avoir :
$(-6-a)^2 = 2\,p\,(-2-b)$, à savoir $36 + 12\,a + a^2 = -4\,p - 2\,b\,p$.

Le point $\mathrm{C}(-2\,;0)$ se situe aussi sur la parabole, de sorte que :
$(-2-a)^2 = 2\,p\,(0-b)$ ou encore $4 + 4\,a + a^2 = -2\,b\,p$.

Pour déterminer l'équation de la parabole, il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} 36 - 12\,a + a^2 = 4\,p - 2\,b\,p \\ 36 + 12\,a + a^2 = -4\,p - 2\,b\,p \\ 4 + 4\,a + a^2 = -2\,b\,p \end{cases}$$

En soustrayant la première équation de la deuxième, on trouve $24\,a = -8\,p$, ce qui donne $\boxed{p = -3\,a}$.

En substituant $p = -3\,a$ dans la troisième équation, on obtient :
$4 + 4\,a + a^2 = -2\,b \cdot (-3\,a) = 6\,a\,b$, si bien que $\boxed{b = \frac{4+4\,a+a^2}{6\,a}}$.

En remplaçant $p = -3\,a$ et $b = \frac{4+4\,a+a^2}{6\,a}$ dans la première équation, on trouve :
$36 - 12\,a + a^2 = 4 \cdot (-3\,a) - 2 \cdot \frac{4+4\,a+a^2}{6\,a} \cdot (-3\,a) = -12\,a + 4 + 4\,a + a^2$.

On en déduit aussitôt $32 = 4\,a$, c'est-à-dire $\boxed{a = 8}$.

Par suite, $p = -3\,a = -3 \cdot 8 = -24$ et $b = \frac{4+4\,a+a^2}{6\,a} = \frac{4+4\cdot 8+8^2}{6\cdot 8} = \frac{100}{48} = \frac{25}{12}$.

On conclut que la parabole recherchée a pour équation $\boxed{(x-8)^2 = -48\,(y-\frac{25}{12})}$.

2^e^ méthode

En développant l'équation $(x-a)^2 = 2\,p\,(y-b)$, on obtiendra une équation de la forme

$$x^2 + \alpha\,x + \beta\,y + \gamma = 0$$

Puisque la parabole doit passer par les points $\mathrm{A}(6\,;2)$, $\mathrm{B}(-6\,;-2)$ et $\mathrm{C}(-2\,;0)$, en remplaçant tour à tour x et y par les coordonnées de ces points, on obtient le système

$$\begin{cases} 6\,\alpha + 2\,\beta + \gamma = -36 \\ -6\,\alpha - 2\,\beta + \gamma = -36 \\ -2\,\alpha + \gamma = -4 \end{cases}$$

L'addition des deux premières équations donne $2\,\gamma = -72$, d'où suit $\gamma = -36$.
En substituant $\gamma = -36$ dans la troisième équation, on obtient $-2\,\alpha - 36 = -4$, c'est-à-dire $\alpha = -16$.
Dès lors, la première équation devient $6 \cdot (-16) + 2\,\beta + (-36) = -36$, d'où l'on tire $\beta = 48$.

On peut désormais écrire l'équation de la parabole :
$x^2 - 16\,x + 48\,y - 36 = 0$
$x^2 - 16\,x = -48\,y + 36$
$(x - 8)^2 - 64 = -48\,y + 36$
$(x - 8)^2 = -48\,y + 100 = -48\,(y - \frac{100}{48}) = -48\,(y - \frac{25}{12})$