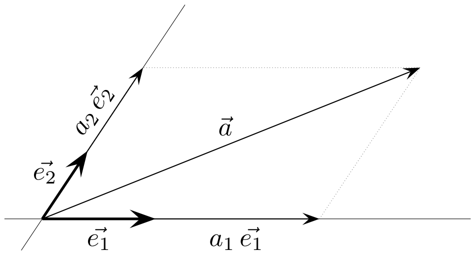
7 Bases

Bases de l'ensemble des vecteurs du plan

Une **base** de l'ensemble V_2 des vecteurs du plan est un couple de vecteurs *non colinéaires* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

Toute combinaison linéaire $a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2}$ détermine un unique vecteur $\vec{a}$ du plan. Réciproquement, tout vecteur $\vec{a}$ du plan se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.

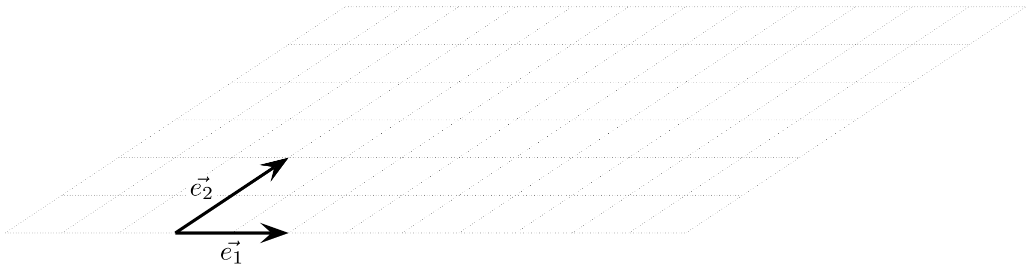


$$\vec{a} = a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2} \iff \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Les nombres réels a_1 et a_2 s'appellent les **composantes** du vecteur $\vec{a}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

7.1 Représenter dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1};\vec{e_2}\}$ les vecteurs :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

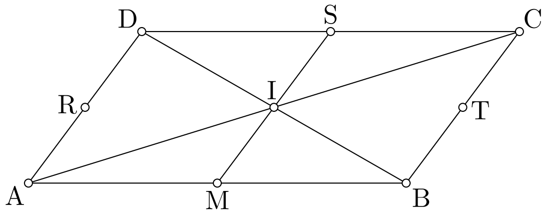


7.2 Donner les composantes des vecteurs qui suivent

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AR}$ c) $\overrightarrow{AS}$ d) $\overrightarrow{AT}$ e) $\overrightarrow{AI}$ f) $\overrightarrow{TD}$ g) $\overrightarrow{TS}$

1) dans la base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right\}$;

2) dans la base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AB}\right\}$.

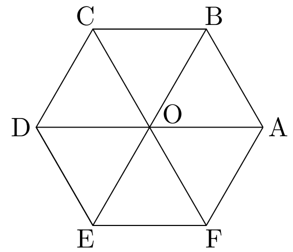


7.3 Soit un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs qui suivent

a) $\overrightarrow{EA}$ b) $\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{ED}$ e) $\overrightarrow{CF}$ f) $\overrightarrow{AD}$

1) dans la base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right\}$;

2) dans la base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OA}\right\}$.



Opérations avec les composantes

Proposition *Soient deux vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *du plan donnés par leurs composantes dans une base* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ *et un nombre réel* λ*. Alors :*

1) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$;

2) $\lambda\,\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 \\ \lambda\, a_2 \end{pmatrix}$.

Preuve

1) $\vec{a}+\vec{b} = a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2} + b_1\,\vec{e_1} + b_2\,\vec{e_2} = (a_1+b_1)\,\vec{e_1} + (a_2+b_2)\,\vec{e_2} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

2) $\lambda\,\vec{a} = \lambda\,(a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2}) = (\lambda\,a_1)\,\vec{e_1} + (\lambda\,a_2)\,\vec{e_2} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \end{pmatrix}$

7.4 Dans une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\}$ on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les composantes des vecteurs qui suivent dans la base $\mathcal{B}$:

1) $\vec{a} + 4\,\vec{b} - 5\,\vec{c}$ 2) $-3\,\vec{a} + \frac{1}{2}\,\vec{b} - \vec{c}$ 3) $5\,\vec{b} - 2\,\vec{c}$

7.5 Dans une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\}$ on donne les vecteurs

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trouver le vecteur $\vec{v}$ en résolvant les équations, puis calculer ses composantes.

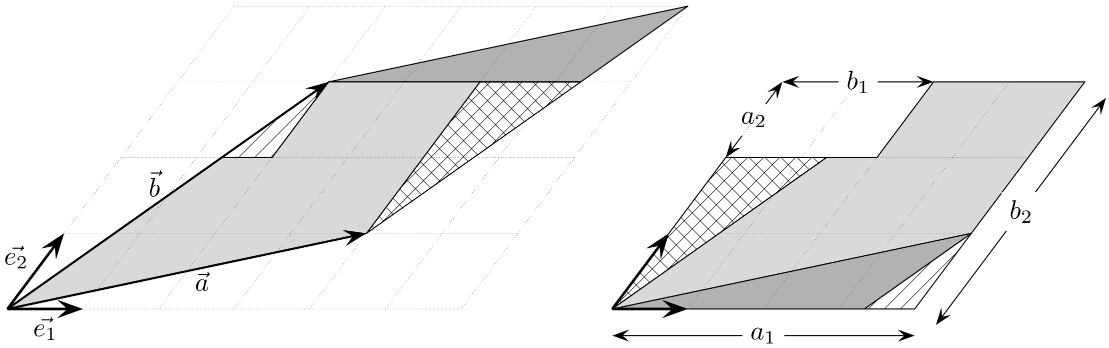
1) $\vec{v} + 2\,\vec{v_2} - 5\,\vec{v_1} = \vec{0}$ 2) $-3\,\vec{v} - \vec{v_3} = \frac{1}{2}\,\vec{v_3} - \vec{v_1}$ 3) $\frac{5}{3}\,\vec{v} + \frac{3}{2}\,\vec{v_4} = \vec{v_3} - 2\,\vec{v_2}$

Dépendance linéaire et déterminants

Proposition *Soient deux vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *du plan donnés par leurs composantes dans une base* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$. *Alors*

$$\left|\det(\vec{a}\,;\vec{b})\right| = |a_1\,b_2 - a_2\,b_1| = \frac{\text{aire du parallélogramme construit sur } \vec{a} \text{ et } \vec{b}}{\text{aire du parallélogramme construit sur } \vec{e_1} \text{ et } \vec{e_2}}$$

Preuve



Corollaire *Soient* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *deux vecteurs du plan. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont colinéaires ;*
2) $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont linéairement dépendants ;*
3) $\det(\vec{a}\,;\vec{b}) = 0$.

7.6 Déterminer les vecteurs colinéaires. Justifier en exprimant l'un des vecteurs comme multiple de l'autre.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

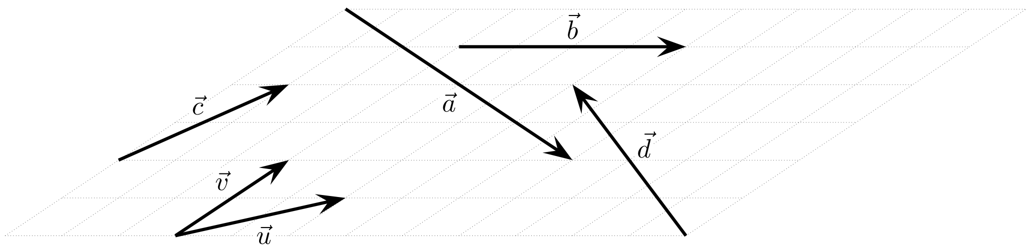
7.7 Pour quelle valeur du paramètre m les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ 2\,m-1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ m+2 \end{pmatrix}$

2) $\vec{u} = \begin{pmatrix} m-1 \\ 2-m \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2\,m \\ 2\,m-3 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$

7.8 Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ dans la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}\,;\vec{v}\}$.



7.9 Dans une base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\}$ on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment une base.
2) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = \{\vec{a}\,;\vec{b}\}$.

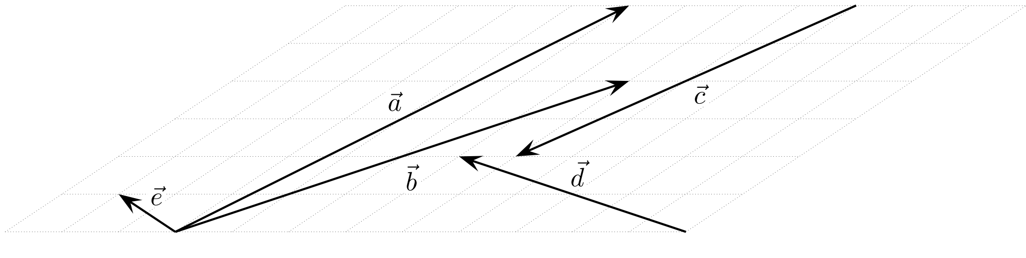
7.10 Dans une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\}$ on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer un nombre réel k et un vecteur $\vec{u}$, colinéaire avec le vecteur $\vec{a}$, tels que $\vec{u} + k\,\vec{b} = \vec{c}$.

Réponses

7.1



7.2 1) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{TD} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ g) $\overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{AT} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{TD} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ g) $\overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7.3 1) a) $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) a) $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

7.4 1) $\begin{pmatrix} -38 \\ 21 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -16 \\ -20 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -30 \\ 26 \end{pmatrix}$

7.5 1) $\vec{v} = 5\,\vec{v_1} - 2\,\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{v} = \frac{1}{3}\,\vec{v_1} - \frac{1}{2}\,\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $\vec{v} = -\frac{6}{5}\,\vec{v_2} + \frac{3}{5}\,\vec{v_3} - \frac{9}{10}\,\vec{v_4} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$

7.6 $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$ sont colinéaires : $\vec{v_3} = -3\,\vec{v_1}$.
$\vec{v_2}$ et $\vec{v_4}$ sont colinéaires : $\vec{v_4} = 2\,\vec{v_2}$.

7.7 1) $m = 1$ ou $m = 3$ 2) $m = 3$ 3) $m = -1$ ou $m = 3$

7.8 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

7.9 2) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7.10 $k = \frac{35}{29}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{105}{29} \\ -\frac{30}{29} \end{pmatrix}$