



Dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} et \vec{d} ont respectivement pour composantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$1) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v}) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v}$$

En écrivant les composantes des vecteurs \vec{a} , \vec{u} et \vec{v} dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v} \\ \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} &= a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 8 = 2a_1 \\ -4 = a_1 + 2a_2 \end{cases}$$

La première équation donne immédiatement $a_1 = 4$.

La seconde équation s'écrit donc $-4 = 4 + 2a_2$, de sorte que $a_2 = -4$.

On conclut que $\vec{a} = 4\vec{u} - 4\vec{v}$

c'est-à-dire $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v})$.

$$2) \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v}) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{b} = b_1 \vec{u} + b_2 \vec{v}$$

En écrivant les composantes des vecteurs \vec{b} , \vec{u} et \vec{v} dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{b} &= b_1 \vec{u} + b_2 \vec{v} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} &= b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2b_1 \\ b_1 + 2b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4 = 2b_1 \\ 0 = b_1 + 2b_2 \end{cases}$$

La première équation donne immédiatement $b_1 = 2$.

La seconde équation s'écrit donc $0 = 2 + 2b_2$, de sorte que $b_2 = -1$.

On conclut que $\vec{b} = 2\vec{u} - \vec{v}$

c'est-à-dire $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v})$.

$$3) \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v}) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{c} = c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v}$$

En écrivant les composantes des vecteurs \vec{c} , \vec{u} et \vec{v} dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on obtient :

$$\vec{c} = c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = 2c_1 \\ 2 = c_1 + 2c_2 \end{cases}$$

La première équation donne immédiatement $c_1 = \frac{1}{2}$.

La seconde équation s'écrit donc $2 = \frac{1}{2} + 2c_2$, de sorte que $c_2 = \frac{3}{4}$.

On conclut que $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}$

c'est-à-dire $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v})$.

$$4) \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v}) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{d} = d_1 \vec{u} + d_2 \vec{v}$$

En écrivant les composantes des vecteurs \vec{d} , \vec{u} et \vec{v} dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on obtient :

$$\vec{d} = d_1 \vec{u} + d_2 \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d_1 \\ d_1 + 2d_2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -6 = 2d_1 \\ 4 = d_1 + 2d_2 \end{cases}$$

La première équation donne immédiatement $d_1 = -3$.

La seconde équation s'écrit donc $4 = -3 + 2d_2$, de sorte que $d_2 = \frac{7}{2}$.

On conclut que $\vec{d} = -3\vec{u} + \frac{7}{2}\vec{v}$
c'est-à-dire $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}; \vec{v})$.