

7.9

- 1) Deux vecteurs quelconques du plan forment une base, à la condition qu'ils soient non colinéaires. Pour montrer que les vecteurs \vec{a} et \vec{b} forment une base du plan, il suffit donc de prouver qu'ils sont non colinéaires :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9) - 4 \cdot 3 = -30 \neq 0$$

Les vecteurs \vec{a} et \vec{b} ne sont donc pas colinéaires.

2) (a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}; \vec{b}) \iff \vec{c} = c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b}$

En écrivant les composantes des vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{c} &= c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b} \\ \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2c_1 + 3c_2 \\ 4c_1 - 9c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 12 = 2c_1 + 3c_2 \\ -6 = 4c_1 - 9c_2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right|$$

Les combinaisons linéaires indiquées en marge donnent tour à tour :

$$30 = 10c_1 \text{ c'est-à-dire } c_1 = 3$$

$$30 = 15c_2 \text{ à savoir } c_2 = 2$$

On conclut que $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}; \vec{b})$.

(b) $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}; \vec{b}) \iff \vec{d} = d_1 \vec{a} + d_2 \vec{b}$

En écrivant les composantes des vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{d} dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{d} &= d_1 \vec{a} + d_2 \vec{b} \\ \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} &= d_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2d_1 + 3d_2 \\ 4d_1 - 9d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 7 = 2d_1 + 3d_2 \\ -1 = 4d_1 - 9d_2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right|$$

Les combinaisons linéaires indiquées en marge donnent tour à tour :

$$20 = 10d_1 \text{ c'est-à-dire } d_1 = 2$$

$$15 = 15d_2 \text{ à savoir } d_2 = 1$$

On conclut que $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}; \vec{b})$.