11 Cercle trigonométrique & Équations trigonométriques

11.1 Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians.

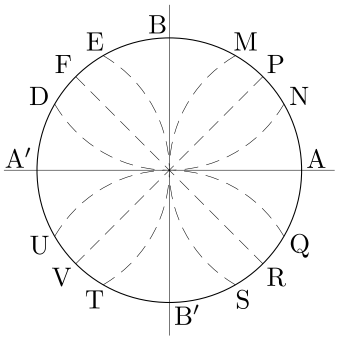
1) $\frac{\pi}{6}$	2) $\frac{2\pi}{3}$	3) $\frac{\pi}{10}$	4) 4π
5) $\frac{5\pi}{6}$	6) $\frac{15\pi}{4}$	7) $\frac{7\pi}{6}$	8) $\frac{11\pi}{5}$

11.2 Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés.

1) 45°	2) 60°	3) 75°	4) 30°
5) 120°	6) 315°	7) 180°	8) 270°
9) 108°	10) 36°	11) 135°	12) 300°

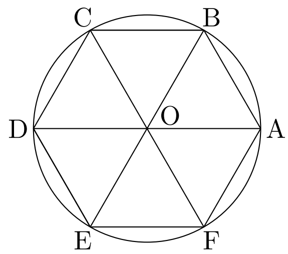
11.3 Donner les images sur le cercle trigonométrique des réels suivants :

1) $\frac{\pi}{2}$	2) $\frac{\pi}{4}$	3) $\frac{3\pi}{4}$
4) $-\frac{\pi}{4}$	5) $-\frac{\pi}{2}$	6) $-\frac{3\pi}{4}$
7) $\frac{\pi}{3}$	8) $\frac{2\pi}{3}$	9) $-\frac{\pi}{3}$
10) $-\frac{2\pi}{3}$	11) $\frac{7\pi}{6}$	12) $-\frac{5\pi}{6}$



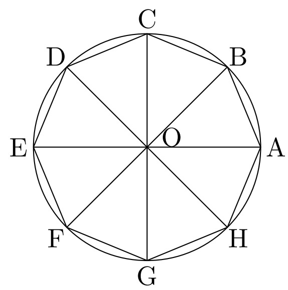
11.4 ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.

1) Donner les réels de $]-\pi\,;\pi]$ qui ont pour images A, B, C, D, E et F.
2) De la même façon, donner dans $[0\,;2\pi[$ les réels ayant pour images A, B, C, D, E et F.



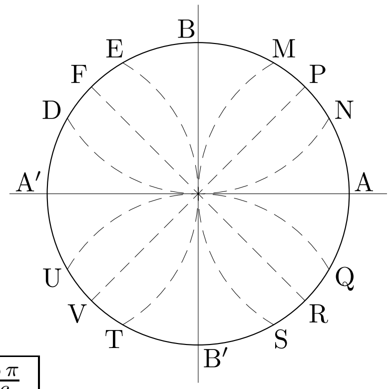
11.5 ABCDEFGH est un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.

1) Donner les réels de $]-\pi\,;\pi]$ qui ont pour images A, B, C, D, E, F, G et H.
2) De la même façon, donner dans $[0\,;2\pi[$ les réels ayant pour images A, B, C, D, E, F, G et H.



11.6 1) Déterminer les coordonnées des points A, N, P, M, B, E, F, D, A′, U, V, T, B′, S, R et Q.

2) Compléter le tableau suivant :



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\alpha)$									
$\sin(\alpha)$									

α	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$
$\cos(\alpha)$							
$\sin(\alpha)$							

11.7 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

1) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ 2) $\cos(\frac{x}{2}) = -\frac{1}{2}$ 3) $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

11.8 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

1) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\sin(\frac{2x}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\sin(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

11.9 Résoudre l'équation $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ en donnant les solutions en radians.

11.10 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

1) $2\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = -1$ 2) $\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1$

3) $\sin(3x) = \sin(2x)$ 4) $\cos(2x) = \cos(4x)$

11.11 En utilisant les formules $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$, résoudre les équations suivantes :

1) $\cos(2x) = \sin(3x)$ 2) $\sin(2x) = \cos(3x + \frac{\pi}{4})$

3) $\cos(2x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 4x)$ 4) $\sin(\frac{4x}{3}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0$

11.12 On considère l'équation $\cos(x) - \sin(x) = 1$. On pose $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$.

1) Justifier que $(a\,;b)$ est solution du système $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$.

2) Déterminer les valeurs de a et b solutions de ce système.

3) En déduire les solutions de l'équation $\cos(x) - \sin(x) = 1$.

11.13 En appliquant la même méthode qu'à l'exercice précédent, résoudre les équations suivantes :

1) $\sin(x) - \cos(x) = \sqrt{2}$ 2) $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 1$

11.14 Résoudre les équations suivantes :

1) $4\cos^2(x) - 4\cos(x) - 3 = 0$ 2) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

3) $3\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 0$ 4) $\tan^4(x) - 4\tan^2(x) + 3 = 0$

Réponses

11.1 1) 30° 2) 120° 3) 18° 4) 720°
5) 150° 6) 675° 7) 210° 8) 396°

11.2 1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{5\pi}{12}$ 4) $\frac{\pi}{6}$
5) $\frac{2\pi}{3}$ 6) $\frac{7\pi}{4}$ 7) π 8) $\frac{3\pi}{2}$
9) $\frac{3\pi}{5}$ 10) $\frac{\pi}{5}$ 11) $\frac{3\pi}{4}$ 12) $\frac{5\pi}{3}$

11.3 1) B 2) P 3) F 4) R
5) B′ 6) V 7) M 8) E
9) S 10) T 11) U 12) U

11.4 1) A : 0 B : $\frac{\pi}{3}$ C : $\frac{2\pi}{3}$ D : π E : $-\frac{2\pi}{3}$ F : $-\frac{\pi}{3}$
2) A : 0 B : $\frac{\pi}{3}$ C : $\frac{2\pi}{3}$ D : π E : $\frac{4\pi}{3}$ F : $\frac{5\pi}{3}$

11.5 1) A : 0 B : $\frac{\pi}{4}$ C : $\frac{\pi}{2}$ D : $\frac{3\pi}{4}$ E : π F : $-\frac{3\pi}{4}$ G : $-\frac{\pi}{2}$ H : $-\frac{\pi}{4}$
2) A : 0 B : $\frac{\pi}{4}$ C : $\frac{\pi}{2}$ D : $\frac{3\pi}{4}$ E : π F : $\frac{5\pi}{4}$ G : $\frac{3\pi}{2}$ H : $\frac{7\pi}{4}$

11.6 1) $A(1\,;0)$ $N(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2})$ $P(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2})$ $M(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$
$B(0\,;1)$ $E(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$ $F(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2})$ $D(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2})$
$A'(-1\,;0)$ $U(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2})$ $V(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2})$ $T(-\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2})$
$B'(0\,;-1)$ $S(\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2})$ $R(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2})$ $Q(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{1}{2})$

2)

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

α	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\alpha)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

11.7 1) $\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{4\pi}{3} + 4k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\pi + 4k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

11.8

1) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 = \frac{3\,\pi}{8} + 3\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{9\,\pi}{8} + 3\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = 3\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{3\,\pi}{4} + 3\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

11.9 $x = -\frac{\pi}{6} + k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

11.10

1) $\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\,k\,\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\,k\,\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) $x = \frac{\pi}{2} + 4\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) $\begin{cases} x_1 = 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2\,k\,\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 = k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{k\,\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

11.11

1) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{2\,k\,\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{2\,k\,\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{k\,\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 = -\frac{3\,\pi}{5} + \frac{12\,k\,\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{3\,\pi}{11} + \frac{12\,k\,\pi}{11} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

11.12

1) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

2) $\mathrm{S} = \{(1\,;0)\,;(0\,;-1)\}$

3) $\begin{cases} x_1 = 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

11.13

1) $x = \frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

2) $\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

11.14

1) $\begin{cases} x_1 = \frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{5\,\pi}{6} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{\pi}{3} + k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

11.15 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

1) $\cos(2\,x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ 2) $\cos(5\,x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\sin(3\,x) = \sin(2\,x - \frac{\pi}{4})$ 4) $\sin(-x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

11.16 Résoudre dans $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\,\pi}{2}]$ les équations suivantes :

1) $\sin(2\,x + \frac{\pi}{3}) = 0$ 2) $\cos(4\,x + \pi) = \cos(x + \frac{3\,\pi}{4})$

11.17 Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ les équations suivantes :

1) $\cos(\frac{x}{2}) = 0$ 2) $\cos(3\,x) = \cos(x + \frac{\pi}{6})$

11.18 Résoudre les équations suivantes :

1) $\cos(x) = \sin(x)$ 2) $\cos(x) = -\sin(\frac{x}{2})$

3) $\sin(2\,x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$

11.19 Résoudre les équations suivantes :

1) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$ 2) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

3) $\cos^2(x) = \sin^2(x)$ 4) $2\,\cos^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$

Réponses

11.15

1) $\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{7\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

11.16

1) $S = \{-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{4\pi}{3}\}$

2) $S = \{-\frac{7\pi}{20} ; -\frac{\pi}{12} ; \frac{\pi}{20} ; \frac{9\pi}{20} ; \frac{7\pi}{12} ; \frac{17\pi}{20} ; \frac{5\pi}{4}\}$

11.17

1) $S = \{\pi\}$

2) $S = \{-\frac{11\pi}{12} ; -\frac{13\pi}{24} ; -\frac{\pi}{24} ; \frac{\pi}{12} ; \frac{11\pi}{24} ; \frac{23\pi}{24}\}$

11.18

1) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

2) $\begin{cases} x_1 = \pi + 4k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

11.19

1) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$