11.11 1) L'équation $\cos(2\,x) = \sin(3\,x)$ est équivalente à $\cos(2\,x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 3\,x)$.

On en déduit :

$$\begin{cases} 2\,x_1 = \frac{\pi}{2} - 3\,x_1 + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ 2\,x_2 = -\frac{\pi}{2} + 3\,x_2 + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En ajoutant $3\,x_1$ dans la première équation et en retirant $3\,x_2$ dans la seconde, on trouve :

$$\begin{cases} 5\,x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ -x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On conclut en divisant ces équations respectivement par 5 et -1 :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{2\,k\,\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{2} - 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2) $\sin(2\,x) = \cos(3\,x + \frac{\pi}{4})$ implique $\sin(2\,x) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} - (3\,x + \frac{\pi}{4})\Big) = \sin(\frac{\pi}{4} - 3\,x)$.

Par conséquent, on a :

$$\begin{cases} 2\,x_1 = \frac{\pi}{4} - 3\,x_1 + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ 2\,x_2 = \pi - (\frac{\pi}{4} - 3\,x_2) + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} = \frac{3\,\pi}{4} + 3\,x_2 + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'addition de $3\,x_1$ dans la première équation et la soustraction de $3\,x_2$ dans la seconde mènent à :

$$\begin{cases} 5\,x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ -x_2 = \frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En divisant tour à tour ces équations par 5 et -1, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{2\,k\,\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{3\,\pi}{4} - 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} = -\frac{3\,\pi}{4} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3) On remarque que l'équation

$\cos(2\,x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 4\,x) = \cos\Big(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - 4\,x)\Big) = \cos(4\,x)$

a déjà été résolue à l'exercice 18.4 4).

4) L'équation $\sin(\frac{4\,x}{3}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0$ implique

$\cos(\frac{x}{2}) = -\sin(\frac{4\,x}{3}) = \sin(-\frac{4\,x}{3}) = \cos\Big(\frac{\pi}{2} - (-\frac{4\,x}{3})\Big) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{4\,x}{3})$

On en déduit :

$$\begin{cases} \frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4\,x_1}{3} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x_2}{2} = -\frac{\pi}{2} - \frac{4\,x_2}{3} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En soustrayant $\frac{4\,x_1}{3}$ ou en additionnant $\frac{4\,x_2}{3}$, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{5\,x_1}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11\,x_2}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En multipliant tour à tour par $-\frac{6}{5}$ et $\frac{6}{11}$, il en résulte :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3\,\pi}{5} - \frac{12\,k\,\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} = -\frac{3\,\pi}{5} + \frac{12\,k\,\pi}{5} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{3\,\pi}{11} + \frac{12\,k\,\pi}{11} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$