

11.14 1) En posant $a = \cos(x)$, il s'agit de résoudre :

$$4a^2 - 4a - 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 64 = 8^2$$

$$a_1 = \frac{-(-4)-8}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{-(-4)+8}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2}$$

Il y a ainsi deux équations à résoudre :

$$(a) \cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ implique } \begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(b) \cos(x) = \frac{3}{2} \text{ est impossible, car } -1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation $4 \cos^2(x) - 4 \cos(x) - 3 = 0$ sont

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

2) En posant $b = \sin(x)$, on se ramène à résoudre :

$$2b^2 - 3b + 1 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 = 1^2$$

$$b_1 = \frac{-(-3)+1}{2 \cdot 2} = 1 \quad b_2 = \frac{-(-3)-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Il s'agit dès lors de résoudre deux équations :

$$(a) \sin(x) = 1 \text{ donne } \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Puisque $x_1 = x_2$, on a en définitive une unique famille de solutions $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

$$(b) \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ implique } \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En résumé, les solutions de l'équation $2 \sin^2(x) - 3 \sin(x) + 1 = 0$ sont

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3) La formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donne $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ que l'on remplace dans l'équation à résoudre :

$$3(1 - \cos^2(x)) + \cos^2(x) - 2 = 1 - 2\cos^2(x) = 1^2 - (\sqrt{2} \cos(x))^2 = (1 - \sqrt{2} \cos(x))(1 + \sqrt{2} \cos(x)) = 0$$

$$\text{On en tire que } \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(a) \text{ Si } \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ alors } \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$(b) \text{ Si } \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ alors } \begin{cases} x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation $3 \sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 0$ sont

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4) Si l'on pose $t = \tan(x)$, alors il convient de résoudre :

$$0 = t^4 - 4t^2 + 3 = (t^2 - 1)(t^2 - 3) = (t - 1)(t + 1)(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$$

(a) Si $t = \tan(x) = 1$, alors $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Si $t = \tan(x) = -1$, alors $x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Si $t = \tan(x) = \sqrt{3}$, alors $x_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Si $t = \tan(x) = -\sqrt{3}$, alors $x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, les solutions de l'équation $\tan^4(x) - 4 \tan^2(x) + 3 = 0$ sont

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$