3 Division polynomiale

En arithmétique, on étudie la division des nombres entiers avec reste.
Étant donné deux nombres D (**dividende**) et $d \neq 0$ (**diviseur**), il existe exactement deux nombres entiers q (**quotient**) et r (**reste**) tels que

$$\mathrm{D} = d\,q + r \quad \text{avec } 0 \leqslant r < d\,.$$

Par exemple, $80 : 11 = 7$ reste 3, car $80 = 11 \cdot 7 + 3$ avec $0 \leqslant 3 < 11$.

On définit de même la division euclidienne des polynômes.
Étant donné deux polynômes $\mathrm{D}(x)$ (**dividende**) et $d(x) \neq 0$ (**diviseur**), il existe exactement deux polynômes $q(x)$ (**quotient**) et $r(x)$ (**reste**) tels que

$$\mathrm{D}(x) = d(x)\,q(x) + r(x) \quad \text{avec } \deg\big(r(x)\big) < \deg\big(d(x)\big)\,.$$

L'égalité $\mathrm{D} = d\,q + r$ s'appelle l'**égalité fondamentale** de la division.

Pour effectuer une division de deux polynômes, c'est-à-dire déterminer le quotient et le reste, on utilise un algorithme analogue à celui de la division numérique.

1) Ordonner le dividende et le diviseur selon les puissances décroissantes de la variable.
2) Diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur ; on obtient ainsi le premier terme du quotient.
3) Multiplier le diviseur par le terme trouvé et retrancher ce produit du dividende (en fait, il est plus simple d'additionner l'opposé de ce produit). On obtient le premier reste partiel de la division.
4) Recommencer le procédé en prenant le premier reste partiel pour nouveau dividende. Les degrés des restes partiels successifs diminuent. Le processus s'arrête si le reste est nul ou le degré du reste est strictement inférieur au degré du diviseur.

Exemple Divisons $\mathrm{D}(x) = 4\,x^4 - 5\,x^2 + 7\,x + 8$ par $d(x) = x^2 + 2\,x - 3$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4\,x^4 & & -\ 5\,x^2 & +\ 7\,x & +\ 8 & x^2 + 2\,x - 3 \\ \cline{6-6}
-\ 4\,x^4 & -\ 8\,x^3 & +\ 12\,x^2 & & & 4\,x^2 - 8\,x + 23 \\ \cline{1-5}
& -\ 8\,x^3 & +\ 7\,x^2 & +\ 7\,x & +\ 8 & \\
& +\ 8\,x^3 & +\ 16\,x^2 & -\ 24\,x & & \\ \cline{2-5}
& & 23\,x^2 & -\ 17\,x & +\ 8 & \\
& & -\ 23\,x^2 & -\ 46\,x & +\ 69 & \\ \cline{3-5}
& & & -\ 63\,x & +\ 77 &
\end{array}
$$

On a ainsi obtenu l'égalité fondamentale de la division :
$4\,x^4 - 5\,x^2 + 7\,x + 8 = (x^2 + 2\,x - 3)\,(4\,x^2 - 8\,x + 23) + (-63\,x + 77)$

3.1 Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{D}(x)$ par $d(x)$, puis écrire l'égalité fondamentale de la division.

1) $\mathrm{D}(x) = x^4 - 3\,x^3 + x - 5$ $\qquad d(x) = x^2 - 3$
2) $\mathrm{D}(x) = 35\,x^3 + 47\,x^2 + 3\,x + 1$ $\qquad d(x) = 5\,x + 1$
3) $\mathrm{D}(x) = x^7 - 4\,x^6 + 2\,x^5 + x^4 - 3\,x^2 + 2\,x - 6$ $\qquad d(x) = x^5 - 3$
4) $\mathrm{D}(x) = x^8 + x^4 + 1$ $\qquad d(x) = x^2 - x + 1$
5) $\mathrm{D}(x) = x^5 - 3\,x^3 + 2\,x^2 + 5\,x$ $\qquad d(x) = x + 2$
6) $\mathrm{D}(x) = x^3 + 3$ $\qquad d(x) = 5\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1$
7) $\mathrm{D}(x) = 6\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x^2$ $\qquad d(x) = 2\,x^2 - 3$
8) $\mathrm{D}(x) = 7\,x^5 - x^4 + 6\,x^3 - 7\,x$ $\qquad d(x) = 7\,x^3 - x$
9) $\mathrm{D}(x) = 2\,x^3 - 1$ $\qquad d(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$
10) $\mathrm{D}(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$ $\qquad d(x) = 2\,x^2 - 1$

Schéma de Horner

Il existe une disposition pratique des calculs dans le cas de la division par $x - a$, c'est-à-dire un binôme unitaire du premier degré : le **schéma de Horner** [1].

Pour comprendre le procédé, il suffit d'observer attentivement la division dans sa disposition classique :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3\,x^4 & -\ 8\,x^3 & & +\ 10\,x & +\ 5 & x - 2 \\ \cline{6-6}
-\ 3\,x^4 & +\ 6\,x^3 & & & & 3\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 2 \\ \cline{1-5}
 & -\ 2\,x^3 & & & & \\
 & +\ 2\,x^3 & -\ 4\,x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & -\ 4\,x^2 & +\ 10\,x & & \\
 & & +\ 4\,x^2 & -\ 8\,x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 2\,x & +\ 5 & \\
 & & & -\ 2\,x & +\ 4 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 9 &
\end{array}
$$

La disposition du schéma de Horner est la suivante :

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & -8 & 0 & 10 & 5 \\
 & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \\
 & 6 & -4 & -8 & 4 \\ \hline
3 & -2 & -4 & 2 & 9
\end{array}
\qquad (\cdot 2)
$$

Les nombres de la première ligne sont les coefficients du dividende.

Le facteur de multiplication, ici 2, correspond au zéro du diviseur $x - 2$.

La dernière ligne fournit les coefficients du quotient $3\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 2$ et le reste 9.

1. William George Horner, mathématicien anglais (1786-1837).

3.2 Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{D}(x)$ par $d(x)$ en utilisant le schéma de Horner, puis écrire l'égalité fondamentale de la division :

1) $\mathrm{D}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ $\qquad d(x) = x - 1$
2) $\mathrm{D}(x) = x^4 - 4\,x^3 - 12\,x^2 + 2\,x + 4$ $\qquad d(x) = x + 2$
3) $\mathrm{D}(x) = 3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6$ $\qquad d(x) = x + 2$
4) $\mathrm{D}(x) = 3\,x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + 3\,x - 4$ $\qquad d(x) = x - 1$
5) $\mathrm{D}(x) = 2\,x^5 - 11\,x^4 + 16\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 3$ $\qquad d(x) = x - 3$
6) $\mathrm{D}(x) = x^3 + 9\,x^2 + 26\,x + 25$ $\qquad d(x) = x + 3$

3.3 Déterminer, par *utilisation successive du schéma de Horner*, le résultat des divisions suivantes :

1) $(x^3 - 3\,x^2 + 4) : \big((x-2)\,(x+1)\big)$
2) $(4\,x^3 + 4\,x^2 - 5\,x - 3) : \big((x-1)\,(x+\frac{1}{2})\big)$
3) $(x^4 - 5\,x^2 + 4) : \big((x-1)\,(x+2)\big)$

3.4 Écrire les polynômes suivants comme produit de polynômes de degré 1, sachant qu'ils sont tous divisibles par $(x-1)$ et $(x-2)$.

1) $x^3 + x^2 - 10\,x + 8$ $\qquad$ 2) $x^4 - 3\,x^3 - 7\,x^2 + 27\,x - 18$

Théorème *Le reste de la division d'un polynôme* $\mathrm{P}(x)$ *par le binôme* $x - a$ *vaut* $\mathrm{P}(a)$.

Preuve Soient $q(x)$ le quotient et r le reste de la division de $\mathrm{P}(x)$ par $x - a$. Puisque $\deg(r) < \deg(x-a) = 1$, on en déduit que $\deg(r) = 0$, c'est-à-dire que r est un nombre.
L'égalité fondamentale de la division donne $\mathrm{P}(x) = (x-a)\,q(x) + r$. En remplaçant x par a dans cette égalité, on obtient $\mathrm{P}(a) = \underbrace{(a-a)}_{0}\,q(a) + r = r$.

Corollaire *Le nombre* a *est un zéro du polynôme* $\mathrm{P}(x)$ *si et seulement si* $\mathrm{P}(x)$ *est divisible par* $x - a$.

3.5 Calculer le reste de la division de $\mathrm{D}(x)$ par $d(x)$, *sans effectuer la division polynomiale* :

1) $\mathrm{D}(x) = x^3 - 4\,x^2 + 4$ $\qquad d(x) = x - 5$
2) $\mathrm{D}(x) = x^5 - 1$ $\qquad d(x) = x - 1$
3) $\mathrm{D}(x) = -6\,x^3 + 7\,x^2 - 6\,x + 5$ $\qquad d(x) = x + 1$
4) $\mathrm{D}(x) = x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6$ $\qquad d(x) = x + 3$

3.6 Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles les divisions qui suivent sont exactes, *sans effectuer la division.*

1) $(x^2 + a\,x + 15) : (x + 3)$
2) $(x^3 - 5\,x^2 + 7\,x + a) : (x - 1)$
3) $(x^3 + a\,x^2 - 9\,x - 5) : (x + 1)$

3.7 Sans effectuer la division, déterminer le nombre k pour que

1) $x^3 + k\,x^2 - 5\,x + 6$ soit divisible par $x - 1$;
2) $2\,x^3 - x^2 - 7\,x + k$ soit divisible par $x + 2$;
3) $2\,x^3 - 9\,x^2 - 19\,x + k$ soit divisible par $2\,x + 1$.

3.8 Soit $\mathrm{P}(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 11\,x - 6$. Écrire $\mathrm{P}(x)$ comme produit d'un nombre réel et de polynômes unitaires du premier degré sachant qu'un nombre entier compris entre -4 et 0 est solution de l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$.

Théorème *Soit* $\mathrm{P}(x) = c_n\,x^n + c_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + c_2\,x^2 + c_1\,x + c_0$ *un polynôme à coefficients entiers.*

1) Si a est un zéro entier de $\mathrm{P}(x)$*, alors a est un diviseur de c_0.*

2) Si $a = \frac{u}{v}$ est un zéro rationnel de $\mathrm{P}(x)$*, avec u et v premiers entre eux, alors u est un diviseur de c_0 et v est un diviseur de c_n.*

Exemple Factorisons le polynôme $\mathrm{P}(x) = 3\,x^3 - 4\,x^2 - 5\,x + 2$.

Les zéros entiers possibles sont ± 1 et ± 2, car les diviseurs de 2 sont ± 1 et ± 2.

Les zéros rationnels possibles sont $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}$ et $\pm\frac{2}{3}$, car les diviseurs de 2 sont ± 1 et ± 2 et les diviseurs de 3 sont ± 1 et ± 3.

Testons successivement ces candidats jusqu'à trouver un zéro :

$\mathrm{P}(1) = 3 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = -4 \neq 0$

$\mathrm{P}(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 2 = 0$

On sait désormais que le polynôme P est divisible par $x + 1$.

Poursuivons la factorisation à l'aide du schéma de Horner :

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -4 & -5 & 2 \\ & & \oplus & \oplus & \oplus \\ -1 & & -3 & 7 & -2 \\ \hline & 3 & -7 & 2 & 0 \end{array}$$

On en tire que $\mathrm{P}(x) = (x + 1)\,(3\,x^2 - 7\,x + 2)$.

Il reste encore à factoriser le trinôme $3\,x^2 - 7\,x + 2$:

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 > 0 \qquad x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2\cdot 3} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{25}}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$

$3\,x^2 - 7\,x + 2 = 3\,(x - 2)\,(x - \frac{1}{3}) = (x - 2)\,3\,(x - \frac{1}{3}) = (x - 2)\,(3\,x - 1)$

On obtient finalement $\mathrm{P}(x) = 3\,x^3 - 4\,x^2 - 5\,x + 2 = (x + 1)\,(x - 2)\,(3\,x - 1)$.

3.9 Factoriser les polynômes.

1) $x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21$
2) $x^3 + 2\,x^2 - 5\,x - 6$
3) $x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15$
4) $x^4 - 7\,x^3 + 17\,x^2 - 17\,x + 6$
5) $x^5 + 3\,x^4 - 16\,x - 48$
6) $6\,x^4 + 13\,x^3 - 13\,x - 6$
7) $x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$
8) $12\,x^3 - 7\,x^2 - 8\,x + 3$
9) $6\,x^4 - 5\,x^3 - 23\,x^2 + 20\,x - 4$
10) $6\,x^4 + 4\,x^3 - 26\,x^2 - 16\,x + 8$

3.10 Résoudre les équations suivantes.

1) $6\,x^5 + 19\,x^4 + x^3 - 6\,x^2 = 0$
2) $6\,x^4 + x^3 + 5\,x^2 + x - 1 = 0$
3) $3\,x^4 + 11\,x^3 + 9\,x^2 + 2\,x = 0$

Réponses

3.1

1) $x^4 - 3\,x^3 + x - 5 = (x^2 - 3)\,(x^2 - 3\,x + 3) + (-8\,x + 4)$
2) $35\,x^3 + 47\,x^2 + 3\,x + 1 = (5\,x + 1)\,(7\,x^2 + 8\,x - 1) + 2$
3) $x^7 - 4\,x^6 + 2\,x^5 + x^4 - 3\,x^2 + 2\,x - 6 = (x^5 - 3)\,(x^2 - 4\,x + 2) + (x^4 - 10\,x)$
4) $x^8 + x^4 + 1 = (x^2 - x + 1)\,(x^6 + x^5 - x^3 + x + 1)$
5) $x^5 - 3\,x^3 + 2\,x^2 + 5\,x = (x + 2)\,(x^4 - 2\,x^3 + x^2 + 5) - 10$
6) $x^3 + 3 = \frac{1}{5}\,(5\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1) + \frac{1}{5}\,(3\,x^2 - 2\,x + 16)$
7) $6\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x^2 = (2\,x^2 - 3)\,(3\,x^2 + 2\,x + 1) + (6\,x + 3)$
8) $7\,x^5 - x^4 + 6\,x^3 - 7\,x = (7\,x^3 - x)\,(x^2 - \frac{1}{7}\,x + 1) + \left(-\frac{1}{7}\,x^2 - 6\,x\right)$
9) $2\,x^3 - 1 = \frac{2}{3}\,(3\,x^3 - x^2 + x + 1) + \left(\frac{2}{3}\,x^2 - \frac{2}{3}\,x - \frac{5}{3}\right)$
10) $3\,x^3 - x^2 + x + 1 = (2\,x^2 - 1)\left(\frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\,x + \frac{1}{2}\right)$

3.2

1) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x - 1)\,(x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 4) + 5$
2) $x^4 - 4\,x^3 - 12\,x^2 + 2\,x + 4 = (x + 2)\,(x^3 - 6\,x^2 + 2)$
3) $3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6 = (x + 2)\,(3\,x^4 - 14\,x^3 + 35\,x^2 - 69\,x + 133) - 260$
4) $3\,x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + 3\,x - 4 = (x - 1)\,(3\,x^3 - 2\,x^2 + x + 4)$
5) $2\,x^5 - 11\,x^4 + 16\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 3 = (x - 3)\,(2\,x^4 - 5\,x^3 + x^2 + x - 1)$
6) $x^3 + 9\,x^2 + 26\,x + 25 = (x + 3)\,(x^2 + 6\,x + 8) + 1$

3.3 1) $x - 2$ 2) $4\,x + 6$ 3) $x^2 - x - 2$

3.4 1) $(x + 4)\,(x - 1)\,(x - 2)$ 2) $(x - 3)\,(x + 3)\,(x - 1)\,(x - 2)$

3.5 1) 29 2) 0 3) 24 4) -12

3.6 1) $a = 8$ 2) $a = -3$ 3) $a = -3$

3.7 1) $k = -2$ 2) $k = 6$ 3) $k = -7$

3.8 $\mathrm{P}(x) = (x + 3)\,(x - 2)\,(2\,x + 1)$

3.9

1) $(x - 1)\,(x + 3)\,(x + 7)$ 2) $(x + 1)\,(x + 3)\,(x - 2)$
3) $(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 5)\,(x - 3)$ 4) $(x - 1)^2\,(x - 3)\,(x - 2)$
5) $(x - 2)\,(x + 2)\,(x + 3)\,(x^2 + 4)$ 6) $(x - 1)\,(x + 1)\,(3\,x + 2)\,(2\,x + 3)$
7) $(x - 1)\,(x - 2)\,(x^2 + 1)$ 8) $(x - 1)\,(4\,x + 3)\,(3\,x - 1)$
9) $(3\,x - 1)\,(x - 2)\,(x + 2)\,(2\,x - 1)$ 10) $2\,(x - 2)\,(x + 1)\,(x + 2)\,(3\,x - 1)$

3.10

1) $\mathrm{S} = \left\{-3\,;-\frac{2}{3}\,;0\,;\frac{1}{2}\right\}$ 2) $\mathrm{S} = \left\{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\right\}$
3) $\mathrm{S} = \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\,;0\right\}$