

3.10 1) $6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(6x^3 + 19x^2 + x - 6)$

Le polynôme $P(x) = 6x^3 + 19x^2 + x - 6$ admet pour zéros entiers possibles : $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ et ± 6 .

$$P(1) = 6 \cdot 1^3 + 19 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 20 \neq 0$$

$$P(-1) = 6 \cdot (-1)^3 + 19 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 = 6 \neq 0$$

$$P(2) = 6 \cdot 2^3 + 19 \cdot 2^2 + 2 - 6 = 120 \neq 0$$

$$P(-2) = 6 \cdot (-2)^3 + 19 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 20 \neq 0$$

$$P(3) = 6 \cdot 3^3 + 19 \cdot 3^2 + 3 - 6 = 330 \neq 0$$

$$P(-3) = 6 \cdot (-3)^3 + 19 \cdot (-3)^2 + (-3) - 6 = 0$$

On sait donc que $6x^3 + 19x^2 + x - 6$ est divisible par $x + 3$. Déterminons le quotient grâce au schéma de Horner.

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 19 & 1 & -6 \\ & -18 & -3 & 6 \\ \hline 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

On en tire $6x^3 + 19x^2 + x - 6 = (x + 3)(6x^2 + x - 2)$.

Il reste encore à résoudre $6x^2 + x - 2 = 0$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49 = 7^2$$

$$x_1 = \frac{-1-7}{2 \cdot 6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+7}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

$$6x^2 + x - 2 = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)2\left(x - \frac{1}{2}\right) = (3x + 2)(2x - 1)$$

On conclut que :

(a) $6x^5 + 19x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2(x + 3)(3x + 2)(2x - 1)$

(b) $S = \left\{-3; -\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{2}\right\}$

2) Les zéros entiers possibles de $P(x) = 6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1$ sont ± 1 .

$$P(1) = 6 \cdot 1^4 + 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 12 \neq 0$$

$$P(-1) = 6 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + (-1) - 1 = 8 \neq 0$$

Il n'y a donc pas de solutions entières.

Les zéros rationnels possibles sont $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$ et $\pm \frac{1}{6}$.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4} \neq 0$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

Le polynôme $6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1$ admet par conséquent comme facteur $x + \frac{1}{2}$. Amorçons la factorisation à l'aide du schéma de Horner.

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ & -3 & 1 & -3 & 1 \\ \hline 6 & -2 & 6 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(6x^3 - 2x^2 + 6x - 2) = \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)2(3x^3 - x^2 + 3x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2x+1)(x^2(3x-1) + (3x-1)) \\
&= (2x+1)(3x-1)(x^2+1)
\end{aligned}$$

On en déduit $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$.

$$3) \quad 3x^4 + 11x^3 + 9x^2 + 2x = x(3x^3 + 11x^2 + 9x + 2)$$

Les solutions entières possibles de $P(x) = 3x^3 + 11x^2 + 9x + 2$ sont ± 1 et ± 2 .

$$P(1) = 3 \cdot 1^3 + 11 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 2 = 25 \neq 0$$

$$P(-1) = 3 \cdot (-1)^3 + 11 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) + 2 = 1 \neq 0$$

$$P(2) = 3 \cdot 2^3 + 11 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 2 = 88 \neq 0$$

$$P(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 11 \cdot (-2)^2 + 9 \cdot (-2) + 2 = 4 \neq 0$$

Il n'y a ainsi pas de solutions entières.

Les zéros rationnels possibles sont $\pm \frac{1}{3}$ et $\pm \frac{2}{3}$.

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 11 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{19}{3} \neq 0$$

$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 11 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{1}{9} \neq 0$$

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 11 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9 \cdot \frac{2}{3} + 2 = \frac{124}{9} \neq 0$$

$$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 11 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = 0$$

On sait que $x + \frac{2}{3}$ est un facteur de $3x^3 + 11x^2 + 9x + 2$. Utilisons le schéma de Horner pour déterminer le quotient.

$$\begin{array}{r|rrrr}
3 & 11 & 9 & 2 \\
& -2 & -6 & -2 \\
\hline
3 & 9 & 3 & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
3x^3 + 11x^2 + 9x + 2 &= \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 9x + 3) = \left(x + \frac{2}{3}\right)3(x^2 + 3x + 1) \\
&= (3x + 2)(x^2 + 3x + 1)
\end{aligned}$$

Il reste encore à résoudre $x^2 + 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

En définitive, on a obtenu $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 0\right\}$.