3.9 1) $\mathrm{P}(x) = x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21$

Les solutions entières possibles sont : ± 1, ± 3, ± 7 et ± 21.

$\mathrm{P}(1) = 1^3 + 9 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 21 = 0$
$x = 1$ est une solution, donc $(x - 1)$ est un facteur de P.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 9 & 11 & -21 \\ & 1 & 10 & 21 \\ \hline 1 & 10 & 21 & \| & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21 &= (x-1)\,(x^2 + 10\,x + 21) \\ &= (x-1)\,(x+3)\,(x+7) \end{aligned}$$

2) $\mathrm{P}(x) = x^3 + 2\,x^2 - 5\,x - 6$

Les solutions entières possibles sont : ± 1, ± 2, ± 3 et ± 6.

$\mathrm{P}(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 = -8 \neq 0$
$\mathrm{P}(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 0$
$x = -1$ est une solution, donc $(x + 1)$ est un facteur de P.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -5 & -6 \\ & -1 & -1 & 6 \\ \hline 1 & 1 & -6 & \| & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 + 2\,x^2 - 5\,x - 6 &= (x+1)\,(x^2 + x - 6) \\ &= (x+1)\,(x+3)\,(x-2) \end{aligned}$$

3) $\mathrm{P}(x) = x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15$

Les solutions entières possibles sont : ± 1, ± 3, ± 5 et ± 15.

$\mathrm{P}(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 16 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 15 = 0$
$x = 1$ est une solution, donc $(x - 1)$ est un facteur de P.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -16 & -2 & 15 \\ & 1 & 3 & -13 & 15 \\ \hline 1 & 3 & -13 & -15 & \| & 0 \end{array}$$

$x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15 = (x-1)\,(x^3 + 3\,x^2 - 13\,x - 15)$

Le quotient $\mathrm{Q}(x) = x^3 + 3\,x^2 - 13\,x - 15$ ne peut pas se factoriser au moyen de la mise en évidence, des produits remarquables ou des groupements.

Les solutions entières possibles de Q sont : ± 1, ± 3, ± 5 et ± 15.

$\mathrm{Q}(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 - 15 = -24 \neq 0$
$\mathrm{Q}(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) - 15 = 0$
$x = -1$ est une solution de Q, donc $(x + 1)$ est un facteur de Q.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -13 & -15 \\ & -1 & -2 & 15 \\ \hline 1 & 2 & -15 & \| & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^3 + 3\,x^2 - 13\,x - 15 = (x+1)\,(x^2 + 2\,x - 15)$

Le polynôme initial P se factorise par conséquent ainsi :

$$\begin{aligned} P(x) = (x-1)\,Q(x) &= (x-1)\,(x+1)\,(x^2+2\,x-15) \\ &= (x-1)\,(x+1)\,(x+5)\,(x-3) \end{aligned}$$

4) $P(x) = x^4 - 7\,x^3 + 17\,x^2 - 17\,x + 6$

Les solutions entières possibles sont : ± 1, ± 2, ± 3 et ± 6.

$P(1) = 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 17 \cdot 1^2 - 17 \cdot 1 + 6 = 0$
$x = 1$ est une solution, donc $(x-1)$ est un facteur de P.

$$\begin{array}{rrrr||r} 1 & -7 & 17 & -17 & 6 \\ & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline 1 & -6 & 11 & -6 & 0 \end{array}$$

$x^4 - 7\,x^3 + 17\,x^2 - 17\,x + 6 = (x-1)\,(x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6)$

Le quotient $Q(x) = x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6$ ne peut pas se factoriser au moyen de la mise en évidence, des produits remarquables ou des groupements.

Les solutions entières possibles de Q sont : ± 1, ± 2, ± 3 et ± 6.

$Q(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$
$x = 1$ est une solution de Q, donc $(x-1)$ est un facteur de Q.

$$\begin{array}{rrr||r} 1 & -6 & 11 & -6 \\ & 1 & -5 & 6 \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6 = (x-1)\,(x^2 - 5\,x + 6)$

Le polynôme initial P se factorise par conséquent ainsi :

$$\begin{aligned} P(x) = (x-1)\,Q(x) &= (x-1)^2\,(x^2 - 5\,x + 6) \\ &= (x-1)^2\,(x-2)\,(x-3) \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} x^5 + 3\,x^4 - 16\,x - 48 &= x^4\,(x+3) - 16\,(x+3) \\ &= (x+3)\,(x^4 - 16) = \\ &= (x+3)\,(x^2-4)\,(x^2+4) \\ &= (x+3)\,(x-2)\,(x+2)\,(x^2+4) \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} 6\,x^4 + 13\,x^3 - 13\,x - 6 &= 6\,x^4 - 6 + 13\,x^3 - 13\,x \\ &= 6\,(x^4-1) + 13\,x\,(x^2-1) \\ &= 6\,(x^2-1)\,(x^2+1) + 13\,x\,(x^2-1) \\ &= (x^2-1)\,\big(6\,(x^2+1) + 13\,x\big) \\ &= (x^2-1)\,(6\,x^2 + 13\,x + 6) \\ &= (x-1)\,(x+1)\,(6\,x^2 + 13\,x + 6) \end{aligned}$$

Il reste encore à tenter de factoriser le trinôme $6\,x^2 + 13\,x + 6$.

$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 25$
$x_1 = \frac{-13+\sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{-13-\sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} 6\,x^2 + 13\,x + 6 &= 6\,(x + \tfrac{2}{3})\,(x + \tfrac{3}{2}) \\ &= 3\,(x + \tfrac{2}{3})\,2\,(x + \tfrac{3}{2}) \\ &= (3\,x + 2)\,(2\,x + 3) \end{aligned}$$

Finalement $6\,x^4 + 13\,x^3 - 13\,x - 6 = (x - 1)\,(x + 1)\,(3\,x + 2)\,(2\,x + 3)$.

7) $\mathrm{P}(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$

Les solutions entières possibles sont : ± 1 et ± 2.

$\mathrm{P}(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$
$x = 1$ est une solution, donc $(x - 1)$ est un facteur de P.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2 &= (x - 1)\,(x^3 - 2\,x^2 + x - 2) \\ &= (x - 1)\big(x^2\,(x - 2) + 1\,(x - 2)\big) \\ &= (x - 1)\,(x - 2)\,(x^2 + 1) \end{aligned}$$

8) $\mathrm{P}(x) = 12\,x^3 - 7\,x^2 - 8\,x + 3$

Les solutions entières possibles sont : ± 1 et ± 3.

$\mathrm{P}(1) = 12 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 3 = 0$
$x = 1$ est une solution, donc $(x - 1)$ est un facteur de P.

$$\begin{array}{rrr|r} 12 & -7 & -8 & 3 \\ & 12 & 5 & -3 \\ \hline 12 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$12\,x^3 - 7\,x^2 - 8\,x + 3 = (x - 1)\,(12\,x^2 + 5\,x - 3)$

Il reste encore à factoriser le trinôme $12\,x^2 + 5\,x - 3$.
$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-3) = 169$
$x_1 = \frac{-5+\sqrt{169}}{2 \cdot 12} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{-5-\sqrt{169}}{2 \cdot 12} = \frac{-18}{24} = -\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} 12\,x^2 + 5\,x - 3 &= 12\,(x - \tfrac{1}{3})\,(x + \tfrac{3}{4}) \\ &= 3\,(x - \tfrac{1}{3})\,4\,(x + \tfrac{3}{4}) \\ &= (3\,x - 1)\,(4\,x + 3) \end{aligned}$$

En définitive $12\,x^3 - 7\,x^2 - 8\,x + 3 = (x - 1)\,(3\,x - 1)\,(4\,x + 3)$.

9) $\mathrm{P}(x) = 6\,x^4 - 5\,x^3 - 23\,x^2 + 20\,x - 4$

Les solutions entières possibles sont : ± 1, ± 2 et ± 4.

$\mathrm{P}(1) = 6 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1^3 - 23 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 - 4 = -6 \neq 0$
$\mathrm{P}(-1) = 6 \cdot (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 - 23 \cdot (-1)^2 + 20 \cdot (-1) - 4 = -36 \neq 0$
$\mathrm{P}(2) = 6 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 23 \cdot 2^3 + 20 \cdot 2 - 4 = 0$
$x = 2$ est une solution, donc $(x - 2)$ est un facteur de P.

$$\begin{array}{rrrr||r} 6 & -5 & -23 & 20 & -4 \\ & 12 & 14 & -18 & 4 \\ \hline 6 & 7 & -9 & 2 & 0 \end{array}$$

$6\,x^4 - 5\,x^3 - 23\,x^2 + 20\,x - 4 = (x - 2)\,(6\,x^3 + 7\,x^2 - 9\,x + 2)$

Le quotient $\mathrm{Q}(x) = 6\,x^3 + 7\,x^2 - 9\,x + 2$ ne peut pas se factoriser au moyen de la mise en évidence, des produits remarquables ou des groupements.

Les solutions entières possibles de Q sont : ± 1 et ± 2.
Mais on a déjà testé sans succès les solutions ± 1.
Les seules solutions entières possibles sont donc ± 2.

$\mathrm{Q}(2) = 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 = 60 \neq 0$
$\mathrm{Q}(-2) = 6 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = 0$
$x = -2$ est une solution, donc $(x + 2)$ est un facteur de Q.

$$\begin{array}{rrr||r} 6 & 7 & -9 & 2 \\ & -12 & 10 & -2 \\ \hline 6 & -5 & 1 & 0 \end{array}$$

$\mathrm{Q}(x) = 6\,x^3 + 7\,x^2 - 9\,x + 2 = (x + 2)\,(6\,x^2 - 5\,x + 1)$

Le polynôme initial P se factorise donc ainsi :
$\mathrm{P}(x) = (x - 2)\,\mathrm{Q}(x) = (x - 2)\,(x + 2)\,(6\,x^2 - 5\,x + 1)$

Il reste encore à factoriser le trinôme $6\,x^2 - 5\,x + 1$.
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$
$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} 6\,x^2 - 5\,x + 1 &= 6\,(x - \tfrac{1}{2})\,(x - \tfrac{1}{3}) \\ &= 2\,(x - \tfrac{1}{2})\,3\,(x - \tfrac{1}{3}) \\ &= (2\,x - 1)\,(3\,x - 1) \end{aligned}$$

En conclusion $6\,x^4 - 5\,x^3 - 23\,x^2 + 20\,x - 4 = (x - 2)\,(x + 2)\,(2\,x - 1)\,(3\,x - 1)$.

10) $P(x) = 6\,x^4 + 4\,x^3 - 26\,x^2 - 16\,x + 8 = 2\,(3\,x^4 + 2\,x^3 - 13\,x^2 - 8\,x + 4)$

Les solutions entières possibles sont : ± 1, ± 2 et ± 4.

$P(1) = 2\,(3 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 13 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 4) = -24 \neq 0$
$P(-1) = 2\,\Big(3 \cdot (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - 13 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 4\Big) = 0$
$x = -1$ est une solution, donc $(x + 1)$ est un facteur de P.

$$\begin{array}{rrrr||r} 3 & 2 & -13 & -8 & 4 \\ & -3 & 1 & 12 & -4 \\ \hline 3 & -1 & -12 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6\,x^4 + 4\,x^3 - 26\,x^2 - 16\,x + 8 &= 2\,(x+1)\,(3\,x^3 - x^2 - 12\,x + 4) \\ &= 2\,(x+1)\,(3\,x^3 - 12\,x - x^2 + 4) \\ &= 2\,(x+1)\,\Big(3\,x\,(x^2 - 4) - 1\,(x^2 - 4)\Big) \\ &= 2\,(x+1)\,(x^2 - 4)\,(3\,x - 1) \\ &= 2\,(x+1)\,(x-2)\,(x+2)\,(3\,x - 1) \end{aligned}$$