4.2

1) $\dfrac{x^3-4\,x}{x^4-x^3-2\,x^2}=\dfrac{x\,(x^2-4)}{x^2\,(x^2-x-2)}=\dfrac{x\,(x-2)\,(x+2)}{x^2\,(x-2)\,(x+1)}=\dfrac{x+2}{x\,(x+1)}$

2) $\dfrac{7\,x^3-3\,x^2+7\,x-3}{7\,x-3}=\dfrac{x^2\,(7\,x-3)+(7\,x-3)}{7\,x-3}=\dfrac{(7\,x-3)\,(x^2+1)}{7\,x-3}$

$=x^2+1$

3) $\dfrac{x-3}{4\,x^3-14\,x^2+18}=\dfrac{x-3}{2\,(2\,x^3-7\,x^2+9)}$

Si le polynôme $2\,x^3-7\,x^2+9$ admet 3 pour zéro, alors la fraction rationnelle peut être simplifiée ; sinon, elle est irréductible.

$2\cdot 3^3-7\cdot 3^2+9=0$

On peut donc factoriser $2\,x^3-7\,x^2+9$ à l'aide du schéma de Horner :

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & -7 & 0 & 9 \\ & 6 & -3 & -9 \\ \hline 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$2\,x^3-7\,x^2+9=(x-3)\,(2\,x^2-x-3)$

$\dfrac{x-3}{4\,x^3-14\,x^2+18}=\dfrac{x-3}{2\,(2\,x^3-7\,x^2+9)}=\dfrac{x-3}{2\,(x-3)\,(2\,x^2-x-3)}$

$=\dfrac{1}{2\,(2\,x^2-x-3)}$

4) $\dfrac{x^3-x}{x^2+x}=\dfrac{x\,(x^2-1)}{x\,(x+1)}=\dfrac{x\,(x-1)\,(x+1)}{x\,(x+1)}=x-1$

5) $\dfrac{x^3+6\,x^2+15\,x+18}{x^2-2\,x-15}=\dfrac{x^3+6\,x^2+15\,x+18}{(x-5)\,(x+3)}$

Cette fraction rationnelle ne peut être simplifiée que si le numérateur $x^3+6\,x^2+15\,x+18$ admet 5 ou -3 pour zéro.

Or 5 ne peut pas être un zéro, car 5 ne divise pas 18.

$(-3)^3+6\cdot(-3)^2+15\cdot(-3)+18=0$

Factorisons $x^3+6\,x^2+15\,x+18$ grâce au schéma de Horner :

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 6 & 15 & 18 \\ & -3 & -9 & -18 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$x^3+6\,x^2+15\,x+18=(x+3)\,(x^2+3\,x+6)$

$\dfrac{x^3+6\,x^2+15\,x+18}{(x-5)\,(x+3)}=\dfrac{(x+3)\,(x^2+3\,x+6)}{(x-5)\,(x+3)}=\dfrac{x^2+3\,x+6}{x-5}$

6) $\dfrac{x^3 - x^2 - 17\,x - 15}{x^2 - 1} = \dfrac{x^3 - x^2 - 17\,x - 15}{(x-1)\,(x+1)}$

Cette fraction rationnelle ne peut être simplifiée que si le numérateur $x^3 - x^2 - 17\,x - 15$ admet pour zéro 1 ou -1.

$1^3 - 1^2 - 17 \cdot 1 - 15 = -32 \neq 0$

$(-1)^3 - (-1)^2 - 17 \cdot (-1) - 15 = 0$

Factorisons $x^3 - x^2 - 17\,x - 15$ à l'aide du schéma de Horner :

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -17 & -15 \\ & -1 & 2 & 15 \\ \hline 1 & -2 & -15 & 0 \end{array}$$

$x^3 - x^2 - 17\,x - 15 = (x+1)\,(x^2 - 2\,x - 15) = (x+1)\,(x-5)\,(x+3)$

$\dfrac{x^3 - x^2 - 17\,x - 15}{(x-1)\,(x+1)} = \dfrac{(x+1)\,(x-5)\,(x+3)}{(x-1)\,(x+1)} = \dfrac{(x-5)\,(x+3)}{x-1}$

7) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

Recherchons les zéros du numérateur :

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$

On constate ainsi que le numérateur n'admet aucun zéro, ce qui signifie qu'il est indécomposable.

Dès lors, la fraction rationnelle $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ est irréductible.

8) $\dfrac{x^2 - 10\,x + 21}{x^2 - 14\,x + 49} = \dfrac{(x-3)\,(x-7)}{(x-7)^2} = \dfrac{x-3}{x-7}$

9) $\dfrac{x^2 - 6\,x + 8}{x^3 - 5\,x^2 + 2\,x + 8} = \dfrac{(x-2)\,(x-4)}{x^3 - 5\,x^2 + 2\,x + 8}$

Cette fraction rationnelle ne peut être simplifiée que si le dénominateur $x^3 - 5\,x^2 + 2\,x + 8$ admet pour zéro 2 ou 4.

$2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 8 = 0$

Factorisons $x^3 - 5\,x^2 + 2\,x + 8$ à l'aide du schéma de Horner :

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -5 & 2 & 8 \\ & 2 & -6 & -8 \\ \hline 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$x^3 - 5\,x^2 + 2\,x + 8 = (x-2)\,(x^2 - 3\,x - 4) = (x-2)\,(x-4)\,(x+1)$

$\dfrac{(x-2)\,(x-4)}{x^3 - 5\,x^2 + 2\,x + 8} = \dfrac{(x-2)\,(x-4)}{(x-2)\,(x-4)\,(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$