10 Produit scalaire

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et on le note $\vec{a} \cdot \vec{b}$, le nombre

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$$

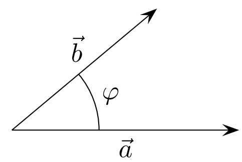
Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul. En résumé :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

10.1 On donne les points $A(-4\,;-3)$, $B(2\,;0)$ et $C(0\,;4)$. Montrer que les droites AB et BC sont perpendiculaires.

10.2 Soient $A(3\,;1)$, $B(9\,;5)$, $C(11\,;2)$ et $D(5\,;-2)$. Le quadrilatère ABCD est-il un rectangle ?

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan et φ l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\, \|\vec{b}\|\, \cos(\varphi)$.



10.3 Soient les points $A(2\,;-3)$, $B(3\,;2)$ et $C(-2\,;5)$. Calculer les angles du triangle ABC.

10.4 On considère les points $A(3\,;3)$, $B(2\,;4)$ et $C(1\,;2)$.

1) Vérifier que le triangle ABC est isocèle.
2) On considère le point D défini par $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Montrer que la droite CD est bissectrice de l'angle ACB.

10.5 Montrer, de deux façons différentes, que les points $A(5\,;-8)$, $B(3\,;1)$, $C(-4\,;7)$ et $D(-2\,;-2)$ forment un losange.

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Alors le vecteur $\vec{b}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{b} = \lambda \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

10.6 On donne les points $A(2\,;1)$ et $B(3\,;-5)$.

1) Déterminer les sommets C et D d'un carré ABCD dont AB est un côté.
2) Déterminer les sommets P et Q d'un carré APBQ dont AB est une diagonale.

10.7 Soient $A(1\,;4)$ et $C(6\,;2)$. Calculer les coordonnées des points B et D tels que le quadrilatère ABCD soit un losange dont la diagonale BD ait une longueur double de la diagonale AC. Déterminer également l'aire du losange et la longueur de ses côtés.

10.8 On donne les points $A(-6\,;-2)$ et $C(-8\,;2)$. Déterminer les coordonnées du troisième sommet B du triangle ABC, sachant que ce triangle est rectangle en C et que $2\,a = 5\,b$.

10.9 On donne les points $B(4\,;8)$ et $C(9\,;-4)$. Déterminer le point A pour lequel ABC est un triangle isocèle en A d'aire égale à 169.

10.10 On donne deux sommets $B(-3\,;8)$ et $C(-6\,;2)$ d'un trapèze ABCD. Déterminer les coordonnées des deux autres sommets de ce trapèze, sachant que :
— ce trapèze est rectangle en B et en C ;
— le côté AB mesure $3\sqrt{5}$;
— le côté CD mesure le double du côté BC.

Réponses

10.2 oui

10.3 $\alpha = 37{,}87^\circ$ $\beta = 109{,}65^\circ$ $\gamma = 32{,}48^\circ$

10.6 1) $C_1(9\,;-4)$ $D_1(8\,;2)$
$C_2(-3\,;-6)$ $D_2(-4\,;0)$
2) $P(-\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{2})$ $Q(\frac{11}{2}\,;-\frac{3}{2})$

10.7 $B(\frac{3}{2}\,;-2)$ $D(\frac{11}{2}\,;8)$ aire : 29 longueur des côtés : $\frac{\sqrt{145}}{2}$

10.8 $B_1(2\,;7)$ $B_2(-18\,;-3)$

10.9 $A_1(\frac{61}{2}\,;12)$ $A_2(-\frac{35}{2}\,;-8)$

10.10 $A_1(-9\,;11)$ $D_1(-18\,;8)$ $A_2(3\,;5)$ $D_2(6\,;-4)$