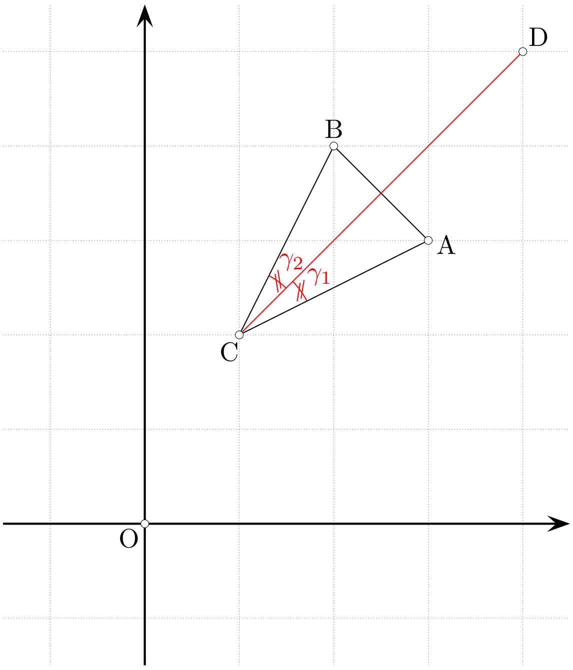
10.4



1) $\|\overrightarrow{CA}\| = \left\|\begin{pmatrix}3-1\\3-2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$\|\overrightarrow{CB}\| = \left\|\begin{pmatrix}2-1\\4-2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

Comme $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$, le triangle ABC est isocèle en C.

2) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+2-1\\3+4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

De $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d_1-0\\d_2-0\end{pmatrix}$, on tire que D$(4\,;5)$.

Pour montrer que la droite CD est bissectrice de l'angle ACB, il faut montrer qu'elle coupe cet angle en deux angles égaux : $\gamma_1 = \gamma_2$.

(a) $\cos(\gamma_1) = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CA}\|\,\|\overrightarrow{CD}\|} = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\|\,\left\|\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right\|}$

$$= \frac{2\cdot 3+1\cdot 3}{\sqrt{2^2+1^2}\,\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}\cdot 3\,\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$\gamma_1 = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 18{,}43^\circ$

(b) $\cos(\gamma_2) = \dfrac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CD}\| \, \|\overrightarrow{CB}\|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}$

$$= \frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{9}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 18{,}43^\circ$