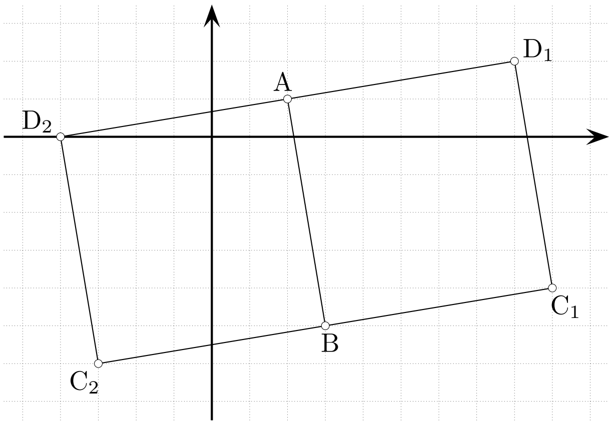
10.6 1)



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$

Puisque $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BC} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, ce qui donne :

$\sqrt{37} = \left\| \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \sqrt{6^2 + 1^2} = |\lambda| \sqrt{37}$

Il en résulte $1 = |\lambda|$, c'est-à-dire $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

(a) Si $\lambda = 1$, alors $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 3 \\ c_2 + 5 \end{pmatrix}$.

Aussi $c_1 = 9$ et $c_2 = -4$, en d'autres termes, $C(9\,;-4)$.

Le point D s'obtient grâce à l'identité vectorielle $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:

$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - 2 \\ d_2 - 1 \end{pmatrix}$ conduit à $d_1 = 8$ et $d_2 = 2$, soit $D(8\,;2)$.

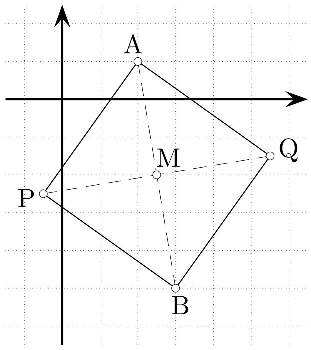
(b) Si $\lambda = -1$, alors $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 3 \\ c_2 + 5 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, $c_1 = -3$ et $c_2 = -6$, d'où $C(-3\,;-6)$.

De même, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ devient $\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - 2 \\ d_2 - 1 \end{pmatrix}$

d'où l'on tire $d_1 = -4$ et $d_2 = 0$, donc $D(-4\,;0)$.

2)



Désignons par M le milieu des points A et B : $\mathrm{M}\left(\frac{2+3}{2}\,;\frac{1-5}{2}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{5}{2}\,;-2\right)$.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-2\\-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-3\end{pmatrix}\qquad \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|=\frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|=\frac{1}{2}\sqrt{37}$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\lambda\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

En outre, $\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|=\|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\|$, ce qui permet de poser :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\sqrt{37}&=\left\|\lambda\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\|=|\lambda|\left\|\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\|=|\lambda|\sqrt{3^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}=|\lambda|\sqrt{9+\tfrac{1}{4}}\\&=|\lambda|\sqrt{\tfrac{37}{4}}=|\lambda|\,\tfrac{\sqrt{37}}{\sqrt{4}}=|\lambda|\,\tfrac{\sqrt{37}}{2}\end{aligned}$$

En résumé $\frac{1}{2}\sqrt{37}=|\lambda|\,\frac{\sqrt{37}}{2}$, d'où l'on déduit $|\lambda|=1$.

(a) Si $\lambda=1$, alors $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1-\frac{5}{2}\\p_2+2\end{pmatrix}$.

Il en résulte $p_1=\frac{11}{2}$ et $p_2=-\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\mathrm{P}(\frac{11}{2}\,;-\frac{3}{2})$.

Sachant que M est aussi le milieu des points P et Q, on a également :

$\mathrm{M}(\frac{5}{2}\,;-2)=\left(\frac{\frac{11}{2}+q_1}{2}\,;\frac{-\frac{3}{2}+q_2}{2}\right)$

D'une part $\quad 5=\frac{11}{2}+q_1\quad$ d'où l'on tire $\quad q_1=5-\frac{11}{2}=-\frac{1}{2}$,

d'autre part $\quad -4=-\frac{3}{2}+q_2\quad$ d'où l'on déduit $\quad q_2=-4+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$.

En définitive, $\mathrm{Q}(-\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{2})$.

(b) Si $\lambda=-1$, alors $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\begin{pmatrix}-3\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1-\frac{5}{2}\\p_2+2\end{pmatrix}$.

On en infère $p_1=-\frac{1}{2}$ et $p_2=-\frac{5}{2}$, donc $\mathrm{P}(-\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{2})$.

En faisant également valoir que M est le milieu des points P et Q, il appert que $\mathrm{Q}(\frac{11}{2}\,;-\frac{3}{2})$, au vu des résultats de (a).

On constate finalement que les possibilités (a) et (b) déterminent le même carré en intervertissant les points P et Q.