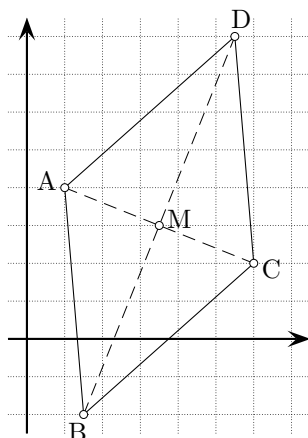


10.7



Appelons M le milieu des points A et C : $M\left(\frac{1+6}{2}; \frac{4+2}{2}\right) = M\left(\frac{7}{2}; 3\right)$.

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

Sachant que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{MB}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MB} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

En outre $\|\overrightarrow{MB}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2} \cdot 2 \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$. Par conséquent :

$$\sqrt{29} = \left\| \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \sqrt{2^2 + 5^2} = |\lambda| \sqrt{29}$$

De la sorte, $|\lambda| = 1$, si bien que $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

$$1) \text{ Si } \lambda = 1, \text{ alors } \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \frac{7}{2} \\ b_2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Il en découle $b_1 = \frac{11}{2}$ et $b_2 = 8$, c'est-à-dire $B(\frac{11}{2}; 8)$.

Puisque M est aussi le milieu des points B et D, on a :

$$M\left(\frac{7}{2}; 3\right) = \left(\frac{\frac{11}{2}+d_1}{2}; \frac{8+d_2}{2}\right) \text{ qui entraîne } d_1 = \frac{3}{2} \text{ et } d_2 = -2, \text{ soit } D(\frac{3}{2}; -2).$$

$$2) \text{ Si } \lambda = -1, \text{ alors } \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \frac{7}{2} \\ b_2 - 3 \end{pmatrix}.$$

Par suite, $b_1 = \frac{3}{2}$ et $b_2 = -2$, donc $B(\frac{3}{2}; -2)$.

Compte tenu des résultats du cas 1), il apparaît que $D(\frac{11}{2}; 8)$, c'est-à-dire que la seconde possibilité revient à échanger les points B et D, définissant ainsi toujours le même losange.

Pour déterminer (au signe près) l'aire du losange, cas particulier d'un parallélogramme, il suffit de calculer le déterminant formé des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} .

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 1 \\ -2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} - 1 \\ 8 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2 + 27 = 29$$

Le losange a ainsi une aire égale à 29.

On peut autrement calculer l'aire du losange en utilisant qu'elle vaut la moitié du produit des diagonales :

$$\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC}\| \cdot 2 \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = (\sqrt{29})^2 = 29$$

Puisque les côtés d'un losange sont isométriques, il suffit de calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ pour connaître leur mesure :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 36} = \sqrt{\frac{145}{4}} = \frac{\sqrt{145}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{145}}{2}$$