10.9 Désignons par M le milieu des points B et C : $M\left(\frac{4+9}{2}\,;\frac{8-4}{2}\right) = M\left(\frac{13}{2}\,;2\right)$.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 9-4 \\ -4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = \sqrt{169} = 13$

Puisque $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

En exploitant l'information concernant l'aire du triangle, on établit l'équation :
$169 = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{BC}\|\,\|\overrightarrow{AM}\| = \frac{1}{2}\cdot 13\,\|\overrightarrow{AM}\|$ d'où l'on tire $\|\overrightarrow{AM}\| = 26$.

Ainsi $26 = \|\overrightarrow{AM}\| = |\lambda| \left\|\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right\| = |\lambda|\sqrt{12^2+5^2} = |\lambda|\sqrt{169} = 13\,|\lambda|$
si bien que $|\lambda| = 2$, c'est-à-dire $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$.

1) Si $\lambda = 2$, alors $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{13}{2} \\ a_2 - 2 \end{pmatrix}$.

   On en déduit $a_1 = \frac{61}{2}$ et $a_2 = 12$, soit $A\left(\frac{61}{2}\,;12\right)$.

2) Si $\lambda = -2$, alors $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -24 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{13}{2} \\ a_2 - 2 \end{pmatrix}$.

   Il en résulte $a_1 = -\frac{35}{2}$ et $a_2 = -8$, c'est-à-dire $A\left(-\frac{35}{2}\,;-8\right)$.