8 Repères & Coordonnées

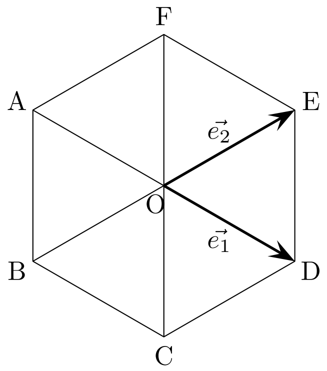
Un **repère du plan** est formé d'un point O du plan et d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\}$ du plan vectoriel. On appelle O l'**origine** et $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\}$ la **base associée** du repère.

Les **coordonnées** d'un point A du plan relativement à un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ relativement à la base associée $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

$$\mathrm{A}(a_1\,;a_2) \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a_1 est la première coordonnée ou **abscisse** du point A ;
a_2 est la seconde coordonnée ou **ordonnée** du point A.

Exemple

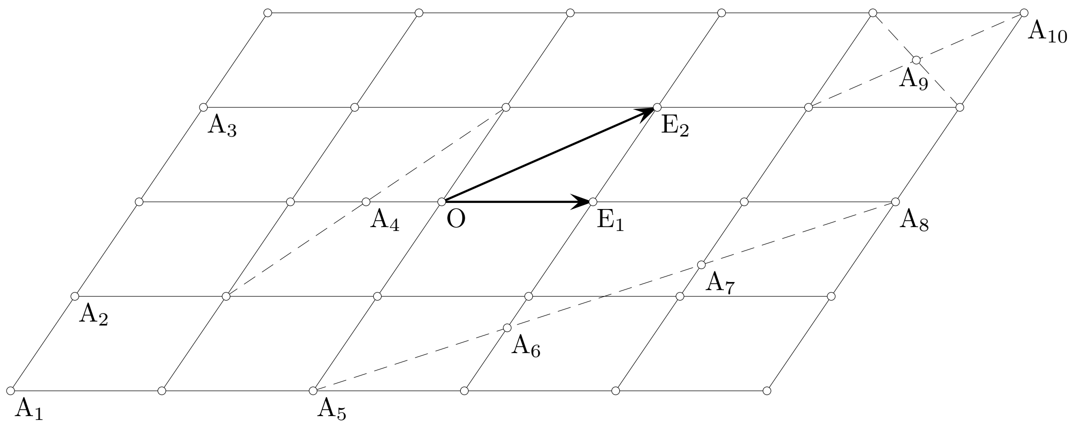


$\mathrm{A}(-1\,;0) \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{D}(1\,;0) \iff \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{B}(0\,;-1) \iff \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{E}(0\,;1) \iff \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

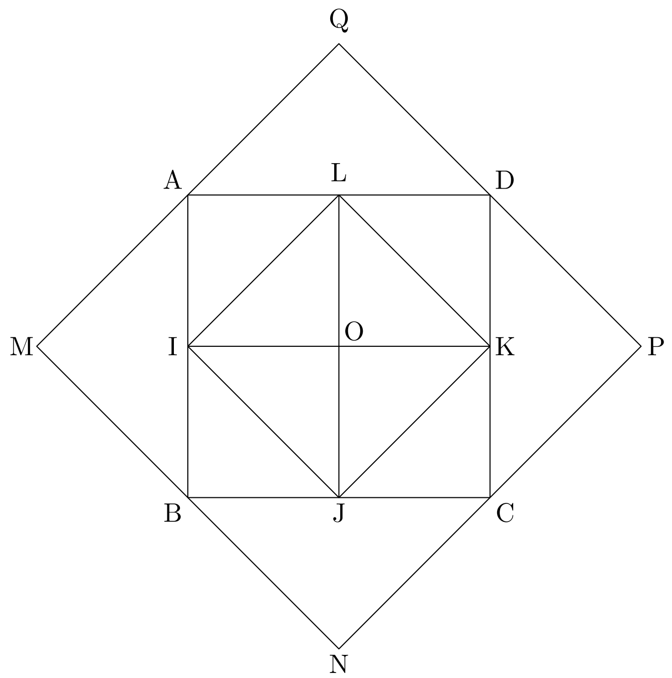
$\mathrm{C}(1\,;-1) \iff \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{F}(-1\,;1) \iff \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.1 Déterminer les coordonnées des points A_1 à A_{10} dans le repère $\mathcal{R} = (\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OE}_1}\,;\overrightarrow{\mathrm{OE}_2})$.



8.2 1) Dans le repère $\mathcal{R} = (\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OK}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OL}})$, déterminer les coordonnées des points B, P et I.

2) Dans le repère $\mathcal{R} = (\mathrm{B}\,;\overrightarrow{\mathrm{BJ}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BI}})$, déterminer les coordonnées des points B, P et I.



Proposition *Soient* $\mathrm{A}(a_1\,;a_2)$ *et* $\mathrm{B}(b_1\,;b_2)$ *deux points du plan. Les composantes du vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *sont données par :*

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Preuve $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

8.3 Dans un repère, on donne les points $\mathrm{A}(0\,;4)$, $\mathrm{B}(8\,;-1)$, $\mathrm{C}(-5\,;-4)$, $\mathrm{D}(-6\,;0)$ et $\mathrm{E}(\frac{1}{2}\,;-\frac{2}{3})$. Déterminer les composantes des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{BA}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{DB}},\ \overrightarrow{\mathrm{EC}},\ \overrightarrow{\mathrm{DA}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{ED}}.$$

8.4 Soient les points $\mathrm{A}(-2\,;1)$, $\mathrm{B}(3\,;2)$ et $\mathrm{C}(0\,;3)$. Soit encore D le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

1) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

2) Calculer les coordonnées du point D.

8.5 On donne les points $A(-1\,;-1)$, $B(1\,;2)$ et $C(3\,;-2)$.

1) Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
2) Calculer les coordonnées du point E tel que le quadrilatère ABEC soit un parallélogramme.

8.6 Relativement à un repère, on donne les points $A(5\,;2)$, $B(6\,;-3)$, $C(7\,;8)$, $D(3\,;8)$, $E(5\,;-6)$ et $F(-1\,;36)$.

1) Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2) Les points D, E et F sont-ils alignés ?

8.7 Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre les points A, B et C sont-ils alignés ?

1)	$A(2\,;t)$	$B(t-1\,;2\,t+1)$	$C(2+t\,;3)$
2)	$A(-1\,;2)$	$B(\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{2})$	$C(t\,;-3\,t+1)$
3)	$A(-1\,;2)$	$B(\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{2})$	$C(t^2\,;3\,t-4)$

Proposition *Soient* $A(a_1\,;a_2)$ *et* $B(b_1\,;b_2)$ *deux points du plan. Les coordonnées du point* M*, milieu de* A *et* B*, sont données par :*

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}\,;\frac{a_2+b_2}{2}\right).$$

8.8 Relativement à un repère, on donne les points $A(5\,;4)$ et $B(-1\,;6)$. Déterminer les coordonnées du point M milieu du segment AB.

Proposition *Soient* $A(a_1\,;a_2)$, $B(b_1\,;b_2)$ *et* $C(c_1\,;c_2)$ *trois points du plan. Les coordonnées du point* G*, centre de gravité des points* A, B *et* C*, sont données par :*

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\,;\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).$$

8.9 Relativement à un repère, on donne les points $A(5\,;1)$, $B(-1\,;3)$ et $C(1\,;-6)$. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

8.10 Trouver les coordonnées du troisième sommet d'un triangle ABC dont on donne deux sommets et le centre de gravité G.

1)	$A(6\,;-1)$	$B(-2\,;6)$	$G(3\,;4)$
2)	$A(10\,;6)$	$C(-7\,;-22)$	$G(-1\,;-4)$

8.11 Soit le triangle ABC de sommets $A(-2\,;-3)$, $B(4\,;-1)$ et $C(2\,;3)$.

1) Déterminer les coordonnées des sommets du triangle diminué $A^*B^*C^*$ (A^* est le milieu de BC, B^* est le milieu de AC et C^* est le milieu de AB).
2) Déterminer le centre de gravité G du triangle ABC et le centre de gravité G^* du triangle $A^*B^*C^*$.

8.12 Déterminer les coordonnées des sommets B et C du triangle ABC, connaissant le sommet $A(6\,;-2)$, le milieu $M_{AC}(2\,;2)$ du côté AC et le milieu $M_{BC}(3\,;1)$ du côté BC.

8.13 Soient les points $A(-2\,;3)$, $B(2\,;1)$, $C(3\,;-5)$ et $D(-5\,;-1)$.

1) Dessiner le quadrilatère ABCD. Quelle est sa nature ?
2) On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments AD, BC, AC et BD. Calculer les coordonnées des points I, J, K et L.
3) Les points I, J, K et L sont-ils alignés ?

8.14 On donne les points $A(4\,;0)$, $B(0\,;6)$, $C(6\,;10)$ et $D(-2\,;-4)$.

1) Représenter le problème et sa solution.
2) Calculer les coordonnées des points M, R, S, T milieux respectifs de AC, BC, BD, AD.
3) Montrer que le quadrilatère TMRS est un parallélogramme.
4) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites TR et MS.

8.15 On donne les points $R(8\,;-15)$, $S(13\,;-3)$, $T(5\,;12)$, $U(-4\,;\frac{15}{2})$.

1) Soit M le milieu de ST. Le quadrilatère OSMU est-il un parallélogramme ?
2) Quelle est la nature du quadrilatère RSTU ?

Réponses

8.1 $A_1(0\,;-2)$ $A_2(-1\,;-1)$ $A_3(-3\,;1)$ $A_4(-\frac{1}{2}\,;0)$ $A_5(2\,;-2)$
$A_6(\frac{7}{3}\,;-\frac{4}{3})$ $A_7(\frac{8}{3}\,;-\frac{2}{3})$ $A_8(3\,;0)$ $A_9(1\,;\frac{3}{2})$ $A_{10}(1\,;2)$

8.2 1) $B(-1\,;-1)$, $P(2\,;0)$ et $I(-1\,;0)$ 2) $B(0\,;0)$, $P(3\,;1)$ et $I(0\,;1)$

8.3 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 33 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -39 \\ 4 \end{pmatrix}$

8.4 1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) D(5 ; 4)

8.5 1) D(1 ; −5) 2) E(5 ; 1)

8.6 1) non 2) oui

8.7 1) A, B et C ne sont jamais alignés 2) $t = 1$ 3) $t = \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ ou $t = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$

8.8 M(2 ; 5)

8.9 $G(\frac{5}{3}\,;-\frac{2}{3})$

8.10 1) C(5 ; 7) 2) B(−6 ; 4)

8.11 1) $A^*(3\,;1)$, $B^*(0\,;0)$ et $C^*(1\,;-2)$ 2) $G = G^*(\frac{4}{3}\,;-\frac{1}{3})$

8.12 B(8 ; −4) et C(−2 ; 6)

8.13 1) Le quadrilatère ABCD est un trapèze.

2) $I(-\frac{7}{2}\,;1)$, $J(\frac{5}{2}\,;-2)$, $K(\frac{1}{2}\,;-1)$ et $L(-\frac{3}{2}\,;0)$

3) Les points I, J, K et L sont alignés.

8.14 2) M(5 ; 5) R(3 ; 8) S(−1 ; 1) T(1 ; −2) 4) I(2 ; 3)

8.15 1) oui 2) trapèze