8.7 Les propositions suivantes sont équivalentes :

- les points A, B et C sont alignés ;
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ;
- le déterminant $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = 0$.

1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} t-1-2 \\ 2\,t+1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t+1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2+t-2 \\ 3-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3-t \end{pmatrix}$

$$0 = \begin{vmatrix} t-3 & t+1 \\ t & 3-t \end{vmatrix} = (t-3)\,(3-t) - t\,(t+1)$$
$$= 3\,t - t^2 - 9 + 3\,t - t^2 - t = -2\,t^2 + 5\,t - 9$$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9) = -47 < 0$

Puisque cette équation n'admet aucune solution, ce déterminant ne peut jamais s'annuler. En d'autres termes, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont jamais colinéaires et les points A, B et C ne sont jamais alignés.

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - (-1) \\ -\frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} t-(-1) \\ -3\,t+1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ -3\,t-1 \end{pmatrix}$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & t+1 \\ -2 & -3\,t-1 \end{vmatrix} = -3\,t - 1 + 2\,(t+1) = -t + 1$$

On conclut que les points A, B et C sont alignés si $t = 1$.

3) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - (-1) \\ -\frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} t^2-(-1) \\ 3\,t-4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 3\,t-6 \end{pmatrix}$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & t^2+1 \\ -2 & 3\,t-6 \end{vmatrix} = 3\,t - 6 + 2\,(t^2+1) = 2\,t^2 + 3\,t - 4$$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41 > 0$

$t_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ et $t_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$

On conclut que les points A, B et C sont alignés si $t = \frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$.