

6 Vecteurs

Pour caractériser certaines grandeurs, il suffit d'un nombre et d'une unité : un arbre de 8 m de haut, deux villes distantes de 60 km, un sac de 36 kg, de l'eau à 28°. Les grandeurs caractérisées par un nombre sont dites **scalaires**.

D'autres grandeurs ne sont pas complètement caractérisées par un nombre. Par exemple, un déplacement de 30 m n'est pas complètement décrit tant qu'on n'indique pas sa direction et son sens : il faut préciser, par exemple, 30 m vers l'ouest. Une grandeur **vectorielle** est caractérisée par un nombre, une direction et un sens. Les translations, les forces, la vitesse et l'accélération sont des grandeurs vectorielles.

Un **vecteur** non nul est la donnée :

- d'une direction ;
- d'un sens ;
- d'une longueur que l'on appelle la **norme** .

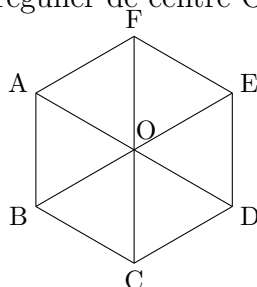
Un vecteur est l'ensemble de toutes les flèches *équivalentes* qui définissent la même translation. Chaque flèche est un **représentant** du vecteur.

Sans référence à un représentant, un vecteur se note par une lettre minuscule surmontée d'une flèche : $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \dots$. L'origine et l'extrémité d'une flèche représentant un vecteur sont aussi utilisées pour le désigner : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PQ}, \dots$.

On note $\|\vec{v}\|$ la norme d'un vecteur \vec{v} .

Exemple

Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O :



$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CD}$ sont des représentants du même vecteur.

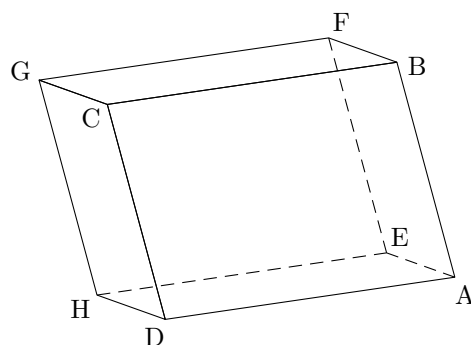
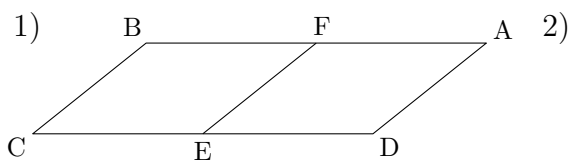
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DE}$ sont des représentants d'un autre vecteur.

\overrightarrow{BC} et \overrightarrow{EF} ne représentent pas le même vecteur, car ils sont de sens contraires.

\overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AD} ne représentent pas le même vecteur, vu qu'ils n'ont pas la même norme.

Dans le cas particulier où l'origine et l'extrémité de la flèche représentant un vecteur sont confondues, il n'y a pas de déplacement et la translation correspondante est l'*identité*. Par extension, on définit le **vecteur nul** comme le vecteur de norme nulle dont la direction et le sens ne sont pas définis. On le note $\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{PP} = \dots$.

6.1 Énumérer tous les vecteurs qui admettent plusieurs représentants extraits des figures ci-dessous.



Addition des vecteurs

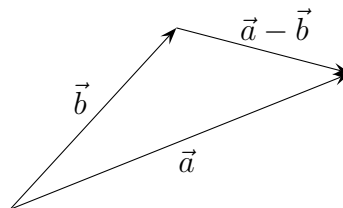
La **somme** des vecteurs \vec{a} et \vec{b} est le vecteur correspondant à la composition des deux translations \vec{a} et \vec{b} . On le note $\vec{a} + \vec{b}$.



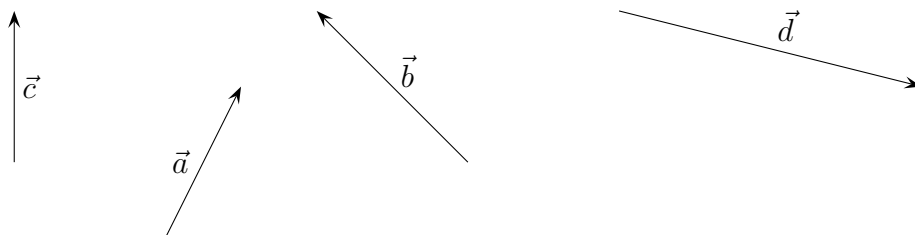
On choisit des représentants des vecteurs \vec{a} et \vec{b} tels que l'origine du représentant de \vec{b} coïncide avec l'extrémité du représentant de \vec{a} . Le vecteur allant de l'origine de \vec{a} à l'extrémité de \vec{b} est la somme $\vec{a} + \vec{b}$.

On définit la **soustraction vectorielle** comme l'addition du vecteur opposé :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{b} + \vec{a}$$

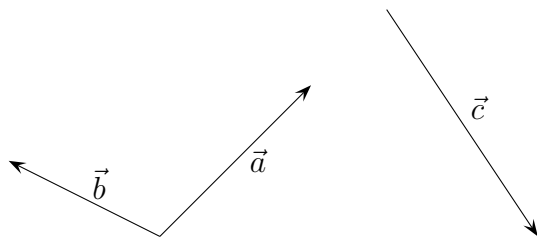


6.2 Dessiner le vecteur $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$.



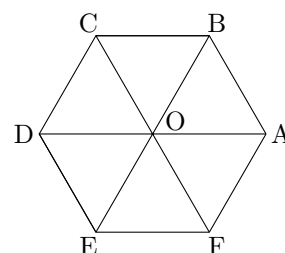
6.3 Représenter le vecteur

$$1) \vec{x} = \vec{a} - \vec{b} \quad 2) \vec{y} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad 3) \vec{z} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \quad 4) \vec{t} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



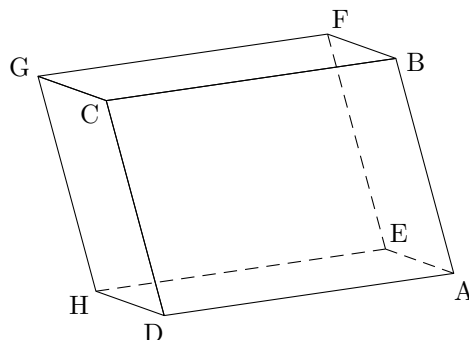
6.4 Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O. Exprimer les vecteurs qui suivent comme un vecteur unique dont chacune des extrémités est l'un des points O, A, B, C, D, E et F.

$$\begin{array}{ll} 1) \vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} & 2) \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} \\ 3) \vec{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE} & 4) \vec{d} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE} \\ 5) \vec{e} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE} & 6) \vec{f} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EE} \end{array}$$



6.5 Soit ABCDEFGH un parallélépipède. Simplifier les vecteurs :

$$\begin{array}{l} 1) \vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} \\ 2) \vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BA} \\ 3) \vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA} \\ 4) \vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA} \\ 5) \vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB} \\ 6) \vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF} \end{array}$$



Propriétés de l'addition des vecteurs

1) L'addition des vecteurs est **associative** :

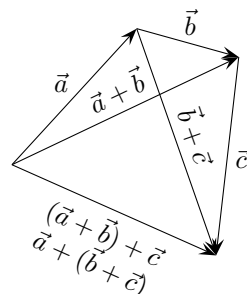
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

quels que soient les vecteurs \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} .

2) Le vecteur nul est un **élément neutre** pour l'addition :

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

pour n'importe quel vecteur \vec{a}



- 3) À tout vecteur \vec{a} est associé son **vecteur opposé**, noté $-\vec{a}$, de même direction, de sens contraire et de même norme que \vec{a} :

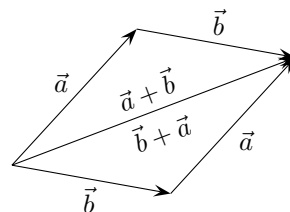
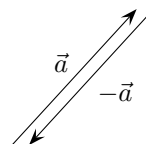
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

pour tout vecteur \vec{a}

- 4) L'addition des vecteurs est **commutative** :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

quels que soient les vecteurs a et b

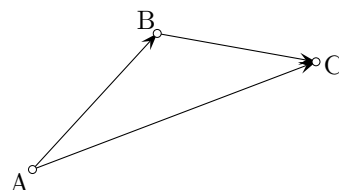


En résumé, ces quatre propriétés signifient que l'ensemble des vecteurs, muni de l'addition vectorielle, forme un **groupe commutatif**.

Relation de Chasles

Soient A, B, C des points quelconques.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Exemples

- 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$
- 2) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC}$

6.6 Soient A, B, C, D et E des points quelconques. Simplifier au maximum :

- 1) $\vec{a} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$
- 2) $\vec{b} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$
- 3) $\vec{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$
- 4) $\vec{d} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$
- 5) $\vec{e} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$
- 6) $\vec{f} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AD}$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soient $k \in \mathbb{R}$ et \vec{a} un vecteur. Le **produit du vecteur \vec{a} par le scalaire k** , noté $k\vec{a}$, est le vecteur caractérisé par :

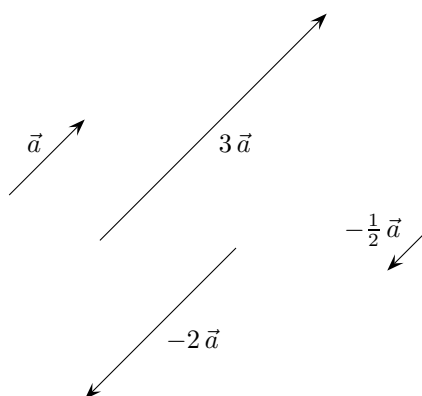
- la direction du vecteur \vec{a} ;
- le sens du vecteur \vec{a} si $k > 0$ et le sens contraire si $k < 0$;
- une norme égale au produit de celle du vecteur \vec{a} par la valeur absolue de k :

$$\|k\vec{a}\| = |k| \|\vec{a}\|$$

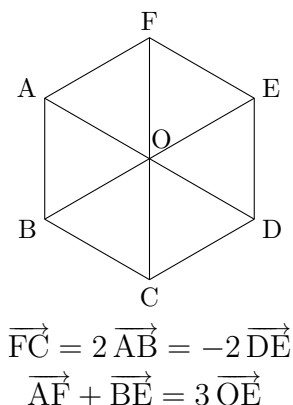
Les vecteurs \vec{a} et $k\vec{a}$ sont **colinéaires**, c'est-à-dire qu'ils ont la même direction. Inversement, deux vecteurs non nuls colinéaires sont multiples l'un de l'autre.

Exemples

1)



2)



6.7 On donne (voir figure ci-dessous) les trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} . Représenter les vecteurs :

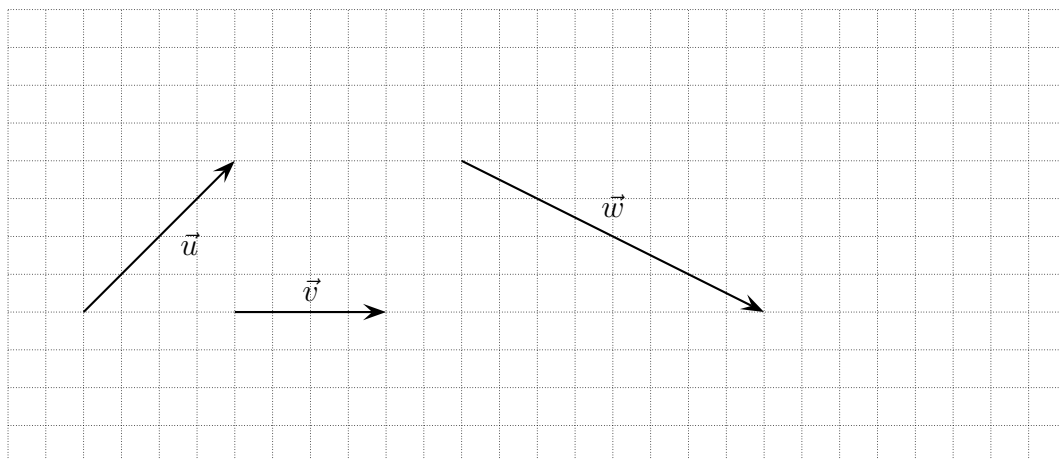
1) $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

2) $\vec{b} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$

3) $\vec{c} = \vec{u} - (\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v})$

4) $\vec{d} = \vec{u} - 4\vec{v} + \vec{w}$

5) $\vec{e} = 2\vec{v} - (\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w})$



6.8 Soit ABCD un carré de 3 cm de côté. Dessiner les points E, F, G et H tels que :

1) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$

2) $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AD}$

3) $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

4) $\overrightarrow{AH} = -\sqrt{2}\overrightarrow{AC}$

6.9 On donne deux points A et B distants de 3 cm (placer le point A à 8 cm du bord droit de votre feuille). Représenter sur un même dessin les points R, S, T et U définis par :

$\overrightarrow{AT} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AU} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{RA} = 3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{SA} = -2\overrightarrow{AB}$

- 6.10** On donne deux points A et B distants de 3 cm (placer le point A au bord gauche de votre feuille). Représenter sur un même dessin les points V, W, X et Y définis par :

$$\overrightarrow{VA} = 3 \overrightarrow{VB} \quad \overrightarrow{WA} = -2 \overrightarrow{WB} \quad \overrightarrow{AX} = \frac{4}{5} \overrightarrow{XB} \quad \overrightarrow{AY} = -\frac{5}{4} \overrightarrow{YB}$$

Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soient \vec{a}, \vec{b} des vecteurs et k, m des scalaires.

- 1) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- 2) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$
- 3) $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$
- 4) $1\vec{a} = \vec{a}$
- 5) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$
- 6) $k(-\vec{a}) = (-k)\vec{a} = -(k\vec{a})$
- 7) $0\vec{a} = \vec{0}$
- 8) $k\vec{0} = \vec{0}$

En résumé, l'ensemble des vecteurs, muni de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un scalaire, forme un **espace vectoriel**.

- 6.11** Réduire l'expression : $\vec{z} = 3(\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}) - \frac{1}{2}(\vec{w} - \vec{u}) + 3(2\vec{v} + \frac{5}{2}\vec{w})$.

Combinaison linéaire

Un vecteur \vec{v} est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ s'il existe des scalaires v_1, v_2, \dots, v_n tels que :

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$$

Des vecteurs sont **linéairement dépendants** si l'un d'eux est une combinaison linéaire des autres.

Dans le cas contraire, ils sont **linéairement indépendants**.

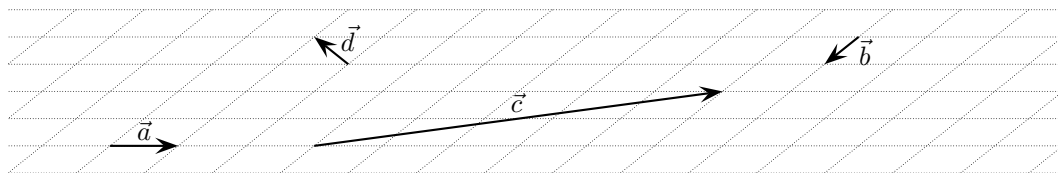
Remarque : deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires.

- 6.12** On considère les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:
- $$\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \quad \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \quad \vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

Exprimer comme combinaisons linéaires des vecteurs \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 :

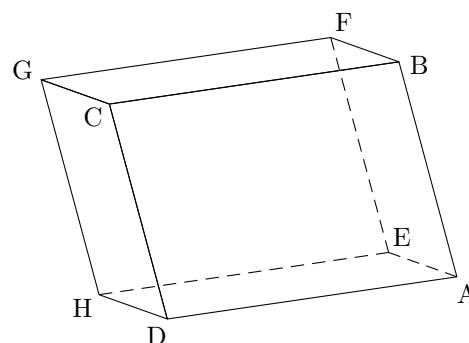
- 1) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
- 2) $3\vec{a} + 3\vec{b}$
- 3) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$
- 4) $3\vec{a} + 2\vec{c}$

- 6.13** Exprimer les vecteurs \vec{c} et \vec{d} comme combinaisons linéaires des vecteurs \vec{a} et \vec{b} . Construire le vecteur $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{c} - 5\vec{d}$ et l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs \vec{a} et \vec{b} .



- 6.14** Dans le parallélépipède ABCDEFGH, on pose : $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AE}$.

Exprimer les vecteurs \overrightarrow{AF} , \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BD} , \overrightarrow{BG} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{BH} , \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{CH} , \overrightarrow{CG} et \overrightarrow{CE} comme combinaisons linéaires des vecteurs \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 .



- 6.15** On considère une pyramide de sommet S dont la base ABCD est un parallélogramme. On pose : $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AS}$. Exprimer les vecteurs \overrightarrow{BS} , \overrightarrow{DS} , \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{CS} , \overrightarrow{AS} , \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{AC} comme combinaisons linéaires des vecteurs \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 .

Réponses

6.1

1) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$
$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FA}$	$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AF}$
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA}$	$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$	$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$	$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$	$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$
$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$	

On peut récrire ces égalités avec les vecteurs opposés.

6.4

1) $\vec{a} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$	2) $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$
3) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$	4) $\vec{d} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DB}$
5) $\vec{e} = \overrightarrow{AD}$	6) $\vec{f} = \overrightarrow{FC}$

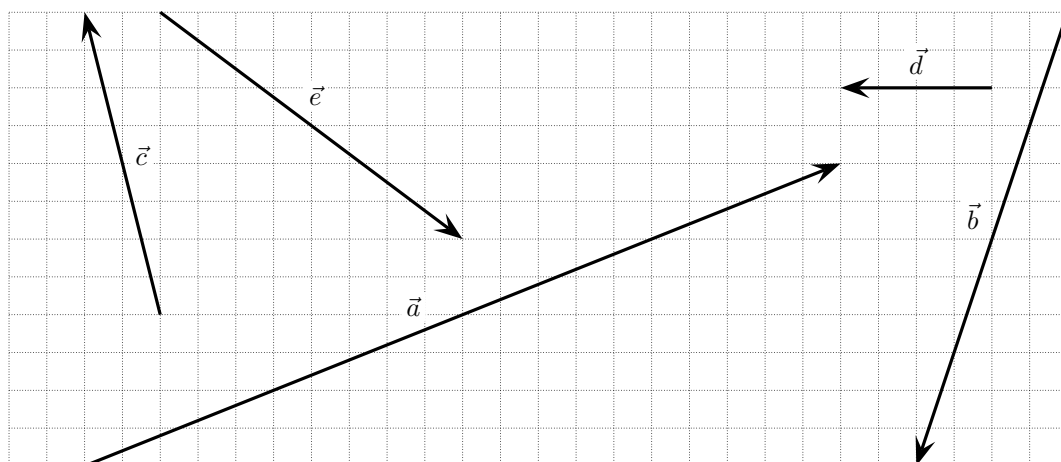
6.5

1) $\vec{a} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$	2) $\vec{b} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$
3) $\vec{c} = \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{GB}$	4) $\vec{d} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{HD}$
5) $\vec{e} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$	6) $\vec{f} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

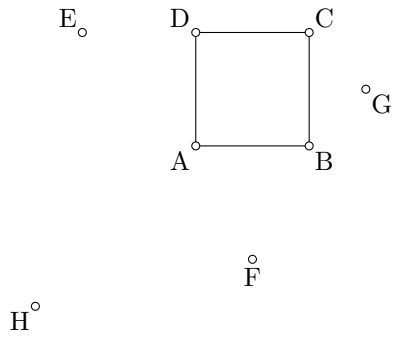
6.6

1) $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$	2) $\vec{b} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$	3) $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$
4) $\vec{d} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}$	5) $\vec{e} = \vec{0}$	6) $\vec{f} = \overrightarrow{DE}$

6.7



6.8



6.9



6.10



6.11

$$\vec{z} = \frac{7}{2} \vec{u} + 3 \vec{v} + 13 \vec{w}$$

6.12

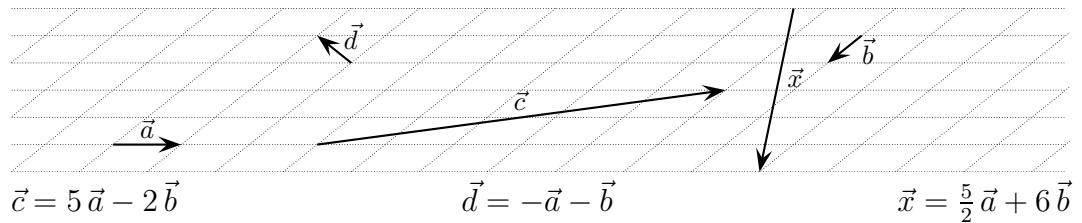
$$1) 2 \vec{e}_1 - 2 \vec{e}_2 + 7 \vec{e}_3$$

$$2) 9 \vec{e}_1 - 3 \vec{e}_2 + 12 \vec{e}_3$$

$$3) -2 \vec{e}_2 + 9 \vec{e}_3$$

$$4) 8 \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 9 \vec{e}_3$$

6.13



6.14

$$\overrightarrow{AF} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{AG} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{BD} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{BG} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{BE} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{BH} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{CA} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{CH} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{CG} = \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{CE} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

6.15

$$\overrightarrow{BS} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{DS} = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{DB} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{CA} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{CS} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{AS} = \vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{DC} = \vec{e}_1$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$