Thème 10: Croissance exponentielle, Logarithmes

10.1 Activités d'introduction

Objectifs du thème: Dans ce thème, nous allons étudier des phénomènes avec **un taux de variation constant**. Ces phénomènes se décrivent à l'aide de fonctions exponentielles, fonctions que nous allons définir et étudier un peu.

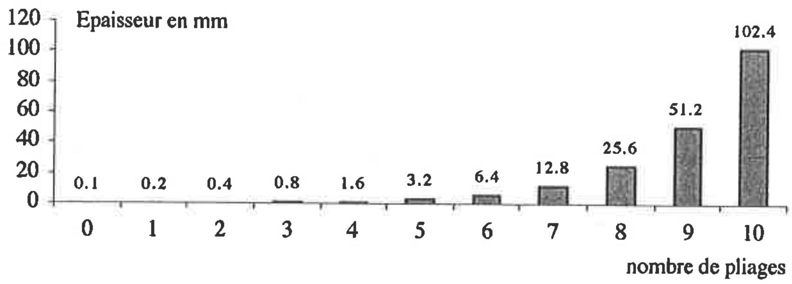
Pour résoudre certaines questions liées aux fonctions exponentielles, nous aurons besoin d'un nouvel outil : **les logarithmes**.

Activité 1 : On plie une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite soixante fois. Serait-il possible d'atteindre une épaisseur qui dépasse :

2 m , 20 m , 1 km , la distance Terre-Soleil ?

Réponse : *D'une part, l'extrême minceur, 0,1 mm, fait douter d'arriver à dépasser des grandeurs comme 20 m, 1 km, et encore plus la distance Terre-Soleil; en doublant quelque chose de très petit, on obtient certainement quelque chose de très petit ! Mais, en le doublant un grand nombre de fois on finit par dépasser n'importe quel nombre.*

Pour se faire une idée, calculons les épaisseurs obtenues après les premiers pliages.



On y observe qu'après 10 pliages l'épaisseur est de l'ordre de 10 cm, ce qui n'est pas encore très grand. Après 15 pliages, l'épaisseur est de l'ordre de 3,2 m, ce qui est déjà plus surprenant. Après 20 pliages, elle est de l'ordre de 100 m et enfin après 60 pliages, elle vaut $0,1 \cdot 2^{60}$ mm.
D'après la calculatrice,

$$0,1 \cdot 2^{60} = 1,152922 \cdot 10^{17}$$

C'est un nombre de millimètres. Comme 1 km = 10^6 mm, cela fait quand même

115'292'200'000 km.

Pour comparaison, la distance de la Terre au Soleil vaut

149'597'910 km

Exercice 10.1: **a)** Sur un même système d'axes, effectuer le graphique des 2 fonctions f et g pour $x \in [-5\,;5]$.

$$f : x \longmapsto x^2$$
$$g : x \longmapsto 2^x$$

b) Laquelle des 2 fonctions croît le plus rapidement ?

c) À l'aide du graphique, résoudre ces 6 équations:

(1) $x^2 = 16$	**(2)** $2^x = 16$
(3) $x^2 = 20$	**(4)** $2^x = 20$
(5) $x^2 = 1$	**(6)** $2^x = 1$

d) On entend parfois dire que *"l'évolution technologique se ferait de façon exponentielle"*. Que signifie au fond cette phrase ?

Activité 2 : Il arrive qu'on reçoive dans sa boîte aux lettres un message libellé comme suit: « *Quand vous recevrez cette lettre, envoyez-moi 10 frs. puis recopiez la lettre dix fois et envoyez-la à dix de vos connaissances. Ainsi, vous recevrez 100 frs. après avoir donné seulement 10 frs. Merci de ne pas interrompre cette chaîne* ». Que penser d'une telle pratique ??

Réponse : *Supposons que tout le monde joue le jeu. Au premier coup, 10 lettres sont envoyées, au deuxième, $10^2 = 100$, au troisième $10^3 = 1000$, ...*
Ainsi, après seulement 10 coups, le nombre de lettres écrites à cette étape (et de personnes ainsi engagées) atteint

$$10^{10} = 10'000'000'000$$

ce qui est plus que la population mondiale ! C'est donc l'impasse. Une foule de gens auront perdu 10 frs, à savoir tous ceux qui ne trouveront plus de personnes après eux pour continuer.
On comprend que la loi interdise ce genre de pratique: les premiers dans la chaîne volent tout simplement les suivants.

Les fonctions appelées **exponentielles** du type: 2^x, 10^x ou ... a^x décrivent la plupart des phénomènes de croissance et de décroissance apparaissant sur notre brave terre:

Croissance d'une population, augmentation de la pollution, accroissement de la demande énergétique, croissance du capital déposé à la banque, augmentation salariale, la cote à l'argus (Eurotax) pour une voiture, la croissance du Web, et j'en passe...

Modèle 1 : Un capital de Frs 10'000.- est placé à un taux d'intérêt de 6% capitalisé annuellement.

Calculons la valeur de ce placement à la fin de chacune des 3 prochaines années.

Croissance de capital:

10'000 $\xrightarrow{+600.-}$

Après 1 an : $\underbrace{10'000 + 10'000 \cdot \frac{6}{100}}$ = 10'600

$= 10'000\,(1 + 0{,}06) = 10'000 \cdot 1{,}06$ $\xrightarrow{+636.-}$

Après 2 an : $10'600\,(1 + 0{,}06) = 11'236$

$= 10'000 \cdot 1{,}06^2$ $\xrightarrow{+674,16}$

Après 3 ans : $11'236 \cdot 1{,}06 = 11'910,16$

$= 10'000 \cdot 1{,}06^3$

Modèle 2 : On place un montant de Frs 5'000.- à un taux d'intérêt de 2¼ % capitalisé annuellement.

Modèle de croissance:

a) Déterminer un **modèle mathématique** décrivant la valeur du capital après *n* années.

b) À l'aide du modèle, déterminer le montant accumulé en 15 ans.

a) Comme dans le modèle 1, on va multiplier chaque fois par 1,0225

⇒ Après n années : $\underbrace{5000 \cdot 1{,}0225^n}_{= C(n)}$

b) Si $n = 15$: $C(15) = 5000 \cdot 1{,}0225^{15} \cong 6981.-$

Exercice 10.2: On place un montant de Frs 7'500.- placé à $3\frac{3}{4}$% d'intérêt capitalisé annuellement.

a) Déterminer le modèle exponentiel décrivant la valeur du capital après n années.

b) Quel est le capital accumulé après 5 ans ?

Exercice 10.3: Un capital placé depuis 13 ans à un taux de $2\frac{3}{4}$% capitalisé annuellement a acquis une valeur de Frs 10'671.50. Déterminer le modèle décrivant la valeur du capital au temps n et à l'aide de ce modèle, déterminer le capital initial.

Exercice 10.4: Quelle somme faut-il placer à un taux de $3\frac{1}{4}$% capitalisé annuellement pour avoir un montant disponible total de Frs 20'000.- au bout de 15 ans de placement ?

Exercice 10.5: À quel taux annuel faut-il placer un capital de Frs 8'000.- pour avoir un montant disponible total de Frs 12'000.- au bout de douze ans de placement ?

Intérêts composés : Les 4 derniers exercices correspondent au type de placement que vous proposent les banques et il est appelé placement à **intérêt composé**. Le capital C_0 placé pendant n années à un taux de t donnera la fortune finale $C(n)$ donnée par

$$C(n) = C_0 \cdot (1+t)^n$$

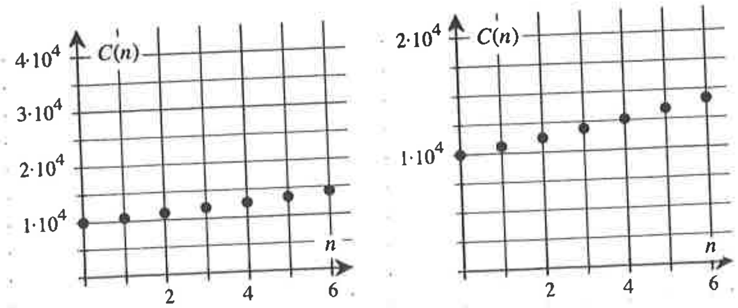
Exercice 10.6: Transformer cette dernière formule afin d'isoler :

a) $C_0 = \ldots\ldots$ **b)** $t = \ldots\ldots$

Graphiques et modèles exponentiels : *Lorsqu'on veut représenter graphiquement une situation descriptible par un modèle exponentiel, il faut savoir choisir l'échelle de l'axe horizontal pour donner une bonne illustration du phénomène.*

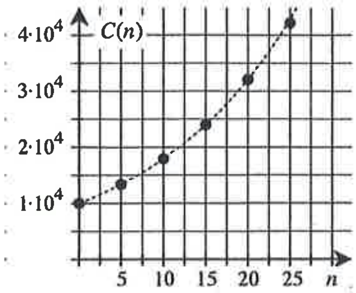
Reprenons $C(n) = 10'000(1,06)^n$ (modèle 1).

n	0	1	2	3	4	5	6
$C(n)$	10'000	10'600	11'236	11'910,16	12'624,77	13'382,25	14'185,19



Graphiques et modèles exponentiels :

n	0	5	10	15	20	25
$C(n)$	10'000	13'382,25	17'908,48	23'965,58	32'071,35	42'918,70



Intervalles de cinq ans

Modèle 3 : Une compagnie vient d'acquérir de nouveaux équipements informatiques au coût de V_0

Décroissance d'une valeur:

a) Sachant que ces équipements se déprécient de 15% par année, déterminer un modèle mathématique décrivant la valeur de ces équipements en fonction du temps.

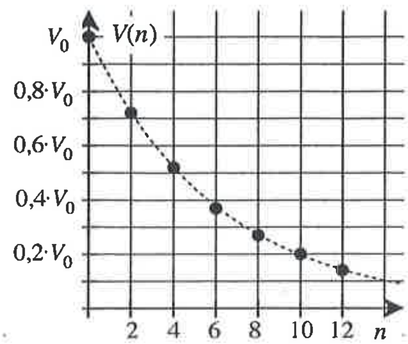
b) À l'aide du modèle, déterminer la valeur de cet équipement 2 ans après l'achat.

a) $V(n) = V_0 \left(1 - \frac{15}{100}\right)^n = V_0 \cdot 0{,}85^n$

b) $V(2) = V_0 \cdot 0{,}85^2 \cong V_0 \cdot 0{,}72 = \underbrace{V_0 (1 - 0{,}38)}_{\text{il perd 38\% de sa valeur.}}$

Graphiquement :

n	0	2	4	6	8	10	12
$V(n)$	V_0	$0{,}72V_0$	$0{,}52V_0$	$0{,}37V_0$	$0{,}27V_0$	$0{,}20V_0$	$0{,}14V_0$



Exercice 10.7: Une automobile se déprécie de 15% par année.

a) Trouver le modèle mathématique décrivant la valeur de l'automobile en fonction du temps n, en représentant par V_0 la valeur à l'achat.

b) Si la valeur initiale était de Frs 10'000.-, combien vaudra-t-elle 8 ans après l'achat ? 10 ans après l'achat ?

c) Esquisser le graphique de cette fonction.

Exercice 10.8: Une compagnie renouvelle sa machinerie au prix de Frs 300'000.- Sachant que cette machinerie se déprécie au taux de 20% par année:

a) Trouver la règle de correspondance donnant la valeur de la machinerie en fonction du temps mesuré en années.

b) Trouver la valeur de la machinerie 2 ans après l'achat, 3 ans après l'achat, 5 ans après l'achat.

c) Esquisser le graphique de cette fonction.

Exercice 10.9: L'ancien comptable de la compagnie avait effectué un placement au nom de la compagnie. Vous ne trouvez en filière que deux relevés de ce placement. Un de ces relevés date de 1977 et indique 35'000.- comme valeur acquise par le placement. L'autre relevé date de 1982 et indique Frs 56'800.- comme valeur du placement.

a) Trouver le modèle mathématique décrivant la valeur du placement en fonction du nombre d'années.

b) Quelle est la valeur du placement en 2005 ?

Exercice 10.10: Quel est le taux de dépréciation d'un équipement dont la valeur initiale était Frs 250'000.- et dont la valeur cinq ans après l'achat est de Frs 110'000.- ?

Exercice 10.11: Un sel radioactif se désintègre de telle sorte qu'à la fin de chaque année, il reste les 49/50 de la quantité au début de l'année.

a) Trouver le modèle mathématique donnant la quantité restante après n années si la quantité initiale est Q_0.

b) Si la quantité initiale est $Q_0 = 100$ unités, trouver la quantité restante après 5 ans, après 10 ans.

Exercice 10.12: Le radium A se désintègre à une vitesse telle qu'à la fin de chaque minute il ne reste que les 8/10 de la quantité initiale.

a) Établir le modèle décrivant la quantité de radium en fonction du temps n mesuré en minutes.

b) Esquisser le graphique de cette fonction.

?? Le saviez-vous ??

Les grains de blé et le jeu d'échecs

Un auteur arabe, Al Sephadi, *raconte que Sessa ayant inventé le jeu d'échecs fut convoqué par son maître, roi de Perse: "Ton jeu m'a redonné la joie de vivre ! je t'offre ce que tu désires !"*
Le sage ne voulait rien et ne dit mot. Le roi offensé s'énerva: "Parle donc, insolent ! Tu as peur que je ne puisse exaucer tes souhaits ?"
Le sage fut blessé par ce ton et décida de se venger: "j'accepte ton présent. Tu feras déposer un grain de blé sur la première case de l'échiquier."
"Et c'est tout ? Te moquerais-tu de moi ?"
"Pas du tout Sire. Vous ferez mettre ensuite 2 grains sur la 2ème case, 4 sur la troisième et ainsi de suite..."
Le roi s'énerva pour de bon: "Puisque tu honores si mal ma générosité, vas-t-en! Ton sac de blé te sera porté demain et ne me dérange plus !"
Le lendemain matin, le roi fut réveillé par son intendant affolé: "Sire, c'est une catastrophe ! Nous ne pouvons pas livrer le blé ! Nos mathématiciens ont travaillé toute la nuit: il n'y a pas assez de blé dans tout le royaume pour exaucer le souhait du savant".

En effet:
- Rien que sur la dernière case il faudrait .... 2^{64} .... *grains de blé.*

- Ce qui au total donnerait le nombre faramineux de 18'446'744'073'709'551'615 grains.

S'il voulait fournir cette quantité de blé, le roi devrait accumuler toutes les moissons réalisées sur Terre depuis 5000 ans !! Si son silo mesure 4 mètres sur 10, sa hauteur devra être de 300 millions de kilomètres, deux fois la distance Terre – Soleil !!

10.2 Équations exponentielles

Objectif: *Résoudre des équations exponentielles à l'aide des propriétés des exposants puis à l'aide de logarithmes.*

Reprenons l'exemple du modèle 1 : $C(n) = 10'000(1{,}06)^n$.

On désire savoir pendant combien de temps on doit placer cet argent pour doubler le capital :

$$10'000(1{,}06)^n = 20'000$$
$$(1{,}06)^n = 2$$

Une équation de cette forme est une **équation exponentielle** et pour la résoudre, il faut trouver la valeur de l'exposant n.

Dans certains cas, ce type d'équations peut être résolu de manière directe (par exple $2^n = 8$), dans d'autres cas, il faudra utiliser la touche $\boxed{\text{Log}}$ *de votre calculatrice.*

Définition: On appelle **équation exponentielle** toute équation où l'inconnue apparaît en exposant.

On devra isoler le terme exponentiel d'un côté du =

$$\boxed{a^x = b} \qquad \text{où } a > 0 \text{ et } a \neq 1.$$

Dans cette expression x est une inconnue, b et a sont des nombres réels positifs quelconques et a est **la base** de l'exponentielle.

Modèle 4 : Résoudre les équations suivantes :

Équations exponentielles:

Idée : • isoler le terme avec l'exponentielle
• s'arranger pour avoir la même base.

• utiliser le

a) $2^{2x} - 64 = 0$

$2^{2x} = 2^6$

$2x = 6$

$x = 3$

b) $10^x = 0{,}01$

$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

$\Rightarrow x = -2$

c) $10^{3x+2} = \frac{1}{10}$

$10^{3x+2} = 10^{-1}$

$3x + 2 = -1$

$3x = -3$

$x = -1$

d) $4 \cdot 3^{x^2-1} = 108$ $\quad 1:4$

$3^{x^2-1} = 27 = 3^3$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 3$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

e) $4^{3x+1} = 8$

$(2^2)^{3x+1} = 2^3$

$2^{6x+2} = 2^3$

$6x + 2 = 3 \Rightarrow 6x = 1, \quad x = \frac{1}{6}$

Dans les exemples ci-dessus, nous avons utilisé le théorème suivant :

Théorème: Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1 alors

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Exercice 10.13: Résoudre les équations suivantes :

a) $5^x = 25$ b) $10^x = \frac{1}{100}$ c) $2 \cdot 3^{x-1} = 18$

d) $4^x = 2^8$ e) $4^x = 8$ f) $5^{-x} = 125$

g) $3^x = 9^{2x+3}$ h) $10^{x+2} = (10^2)^x$ i) $3^{3x+2} = (3^2)^x$

j) $9^{2x+1} = 1$ k) $2^{x+7} = 4^{5x+2}$ l) $7^{8x^2+4} = 7^{(2-3x)^2}$

Modèle 5 : Résoudre l'équation suivante par tâtonnement :

$$2^x = 20$$

Équations exponentielles:

On a $2^4 = 16$ et $2^5 = 32$ $\Rightarrow$ $4 < x < 5$.

$2^{4.5} = 22.6$ $\Rightarrow$ $4 < x < 4.5$

$2^{4.3} = 19.7$ $\Rightarrow$ $4.3 < x < 4.5$

$2^{4.4} = 21.11$ $\Rightarrow$ $4.3 < x < 4.4$

$2^{4.35} = 20.4$ $\Rightarrow$ $4.3 < x < 4.35$

$2^{4.33} = 20.11$ $\Rightarrow$ $4.3 < x < 4.33$

$2^{4.32} = 19.97$ $\Rightarrow$ $\boxed{4.32 < x < 4.33}$ etc...

Exercice 10.14: L'équation exponentielle suivante $10^x = 300$ n'admet pas une solution entière.

a) À l'aide d'essais successifs avec votre calculatrice, trouver une bonne estimation de la solution.

b) Comparer votre réponse avec la valeur de Log 300 obtenue avec votre calculatrice.

10.3 Logarithmes et équations exponentielles

Définition: Soit y un nombre réel positif ($y \neq 1$), alors il existe un et un seul nombre réel x tel que $10^x = y$.

Ce nombre x est appelé **le logarithme en base 10 du nombre** y, ce qui s'écrit

$$\boxed{x = \log_{10}(y)}$$

Définition équivalente: • "Le **logarithme en base 10** est un **exposant**" :

c'est l'exposant qu'il faut donner à la base 10 pour obtenir le nombre y.

$$\boxed{10^x = y \Leftrightarrow x = \log_{10}(y)}$$

Modèle 6 : a) Trouver le logarithme dans la base 10 de 1'000.

Logarithme:

C'est 3 car $10^3 = 1000$

b) Déterminer $\log_{10}(0{,}01)$.

$= x$ et $10^x = 0{,}01$

$= \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

donc $x = -2$

et ainsi $\log_{10}(0{,}01) = -2$

Exercice 10.15:

a) Trouver le logarithme en base 10 du nombre 1'000'000.
b) Trouver le logarithme en base 10 du nombre 1.
c) Trouver le logarithme en base 10 de 1/100'000.
d) Trouver le logarithme en base 10 de 0,001.
e) Trouver x, sachant que $\log_{10}(x) = 3$.
f) Trouver x, sachant que $\log_{10}(x) = -1$.
g) Trouver x, sachant que $\log_{10}(x) = -4$.
h) Trouver x, sachant que $x = \log_{10}\sqrt{10}$.
i) Trouver $\log_{10}(0{,}01)$.
j) Trouver x, sachant que $\log_{10}(x) = 0$.
k) Trouver x, sachant que $\log_{10}[\log_{10}(\log_{10} x)] = 0$.
l) Écrire l'équation suivante sous forme exponentielle et isoler la variable x.

$$\log_{10}(5 - x) = 8$$

Exercice 10.16: Qui s'est écrié face à un gendarme :

« Cornichon !... Pirate !... Espèce de logarithme !... »

Modèle 7 : Exprimer 45 comme puissance de 10.

Logarithme:

On cherche x tel que $10^x = 45$ donc

$x = \log_{10}(45) \cong 1{,}653$
machine

Exercice 10.17: Exprimer les nombres suivants comme puissance de 10:

a) 3	b) 54,5	c) 0,22
d) 1,2	e) 3,7	f) 0,37
g) 8,32	h) 83,2	i) 832

Compléter le tableau suivant :

x	100		17		
$\log_{10}(x)$		3		-2	0,5

Exercice 10.18: Résoudre les équations suivantes:

a) $10^x = 8$	b) $10^x = 0{,}65$	c) $\log_{10}(x) = 1{,}5$
d) $\log_{10}(x) = -0{,}27$	e) $10^{2x} = 0{,}7$	f) $2\log_{10}(x) - 5 = 0$
g) $10^x\left(10^x - 4\right) = 0$	h) $10^{3x} = 25$	i) $10^{-x}\left(10^{-x} - 8\right) = 0$

Exercice 10.19: Compléter le tableau suivant en fonction des valeurs de n:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 = 2$
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} =$ .... = ...
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} =$ .... = ...
1'000	$\left(1+\frac{1}{1'000}\right)^{1'000} =$ .... = ...
10'000	$\left(1+\frac{1}{10'000}\right)^{10'000} =$ .... = ...

Comparer le dernier nombre avec la combinaison des touches de votre calculatrice:

- 

puis 

et enfin 

- ou dans l'ordre inverse 

, 

puis 

et 

?? Le saviez-vous ??

Léonard Euler, 1707 - 1783, mathématicien suisse vécut à Berlin, mais surtout à Saint-Pétersbourg où il fut appelé par Catherine II. Auteur de travaux sur le calcul différentiel, l'algèbre, la mécanique, l'astronomie, l'optique, ... Il a publié son premier mémoire à 18 ans. Il produisit en tout près de 900 travaux, mémoires et livres pour une moyenne de 800 pages par année durant la partie active de sa vie. Même après être devenu aveugle, il poursuivit ses recherches. Il dictait ses résultats à son fils. Le nombre, que vous avez calculé à l'exercice 19 est la base la plus importante des fonctions exponentielles. Il se note e en l'honneur de Euler

Dans la plupart des situations où apparaissent des fonctions exponentielles, elles sont du type: ke^x, ke^{ax}, $k(1 - e^{ax})$

où k et a sont des constantes

Un log dans une base différente de 10 ?: En toute généralité, on peut étendre la définition du logarithme en base 10 à n'importe quelle base $b > 0$. On aurait alors la relation :

$$\boxed{b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b(a)}$$

Mais en pratique, on n'utilise que deux bases :

- en base 10 avec la touche $\boxed{\text{Log}}$
- et en base e = 2,718… avec la touche $\boxed{\text{ln}}$

Ainsi, nous travaillerons avec les 2 relations :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} 10^x = a & \Leftrightarrow & x = \mathrm{Log}(a) \\ e^x = a & \Leftrightarrow & x = \ln(a) \end{array}}$$

Modèle 8 : Exprimer 7,39 et 0,01 comme puissances de 10, puis comme puissances de e.

Les 2 logarithmes:

0,869

On veut $7{,}39 = 10^x$, $x = \log(7{,}39) \cong 0{,}869 \Rightarrow 7{,}39 \cong 10^{0{,}869}$

$\underbrace{0{,}01}_{10^{-2}} = 10^x \Rightarrow \underline{x = -2}$, $0{,}01 = 10^{-2}$

et $7{,}39 = e^x$, $x = \ln(7{,}39) \cong 2 \Rightarrow 7{,}39 \cong e^2$

$0{,}01 = e^x$, $x = \ln(0{,}01) \cong -4{,}61 \Rightarrow 0{,}01 \cong e^{-4{,}61}$

Exercice 10.20: Exprimer les nombres suivants comme puissance de e:

a) 3	**b)** 27,23	**c)** 0,78
d) 1,09	**e)** 3,7	**f)** 0,41
g) 8,32	**h)** 0,9	

Exercice 10.21: Résoudre les équations suivantes:

a) $e^x = 7$	**b)** $e^x = 0{,}65$	**c)** $x = \ln(3)$
d) $\ln(x) = 3$	**e)** $e^{-0{,}01x} = 0{,}7$	

10.4 Les logarithmes pour résoudre des équations exponentielles

Introduction : Jusqu'à maintenant, nous avons pu résoudre des équations exponentielles de 2 types :

- Que l'on peut ramener dans la même base : $2^{x-1} = 4$
- En base dix ou en base e : $10^x = 25$, $e^x = 7$

Il nous reste à généraliser la méthode afin de résoudre une équation pour n'importe quelle base. Cette méthode est basée sur le théorème suivant :

Théorème:

$$\boxed{\text{Log}(a^x) = x \cdot \text{Log}(a)}.$$

En d'autres termes, le log permet de descendre la puissance.

La preuve sera laissée en exercice.

Modèle 9 : Résoudre les équations exponentielles suivantes:

a) $3^x = 24$ **b)** $5^{0,3x+1} = 18$

Équations résolues avec log :

a) $\underbrace{\log(3^x)}_{= x\log(3)} = \log(24) \rightarrow x = \dfrac{\log(24)}{\log(3)} \approx 2,893$

b) $(0,3x+1)\cdot\log(5) = \log(18) \Rightarrow 0,3x = \dfrac{\log(18)}{\log(5)} - 1$

$x = \dfrac{1}{0,3}\left(\dfrac{\log(18)}{\log(5)} - 1\right) \simeq \underline{2,653}$.

Remarques:

- Nous avons naturellement utilisé dans le modèle précédent la propriété suivante :

$$x = y \Leftrightarrow \text{Log}(x) = \text{Log}(y)$$

- On peut également utiliser le logarithme naturel **ln** pour descendre la puissance à l'aide de la même formule :

$$\boxed{\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)}$$

Exercice 10.22: Résoudre les équations suivantes :

a) $2^x = 100$	**b)** $10^x = 5$	**c)** $4^{2x} = 8$
d) $3^{x-1} = 10$	**e)** $5^{2x+3} = 7$	**f)** $1{,}04^x = 100$
g) $4^{x-4} = 20$	**h)** $5^{8x} = -25$	**i)** $12^x = 149$

Modèle 10 : Résoudre l'équation exponentielle suivante:

$$2^{3x+1} = 3^{2x-2}$$

Équation résolue avec log

$$\underbrace{\log(2^{3x+1})} = \log(3^{2x-2})$$

$$(3x+1)\cdot\log(2) = (2x-2)\cdot\log(3)$$

$$3\log(2)\cdot x + \log(2) = 2\log(3)\cdot x - 2\cdot\log(3)$$

$$\underbrace{3\log(2)\cdot x + 2\log(3)\cdot x} = -\log(2) - 2\log(3)$$

$$x\,(3\log(2) + 2\log(3))$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\log(2) - 2\log(3)}{3\log(2) + 2\log(3)} \cong 24{,}54 \ \cancel{0{,}676}$$

Exercice 10.23: Résoudre les équations suivantes :

a) $2^{x-1} = 3^x$	**b)** $4^{x+1} = 6^{3x}$	**c)** $2^{x+4} = 3^{x-1}$

Exercice 10.24: Démontrer la formule du théorème précédent :

$$\boxed{\mathrm{Log}(a^x) = x \cdot \mathrm{Log}(a)}$$

Indication : Il s'agit de créer une chaîne d'égalités partant du membre de gauche $\mathrm{Log}(a^x)$ en considérant que a peut s'écrire en base 10.

En résumé: Les 3 formules à connaître:

À connaître par

- $\log(a^x) = x\log(a)$
- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- $\log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$

10.5 Les transformations de formules

Modèle 11 : Transformer la formule proposée afin d'exprimer y en fonction de x:

a) $x = 5 \cdot 3{,}2^{4y}$ $\Rightarrow$ $y = ?$

$\frac{x}{5} = 3{,}2^{4y}$

Transformation de formules :

$\text{Log}\left(\frac{x}{5}\right) = \underbrace{\text{Log}\left(3{,}2^{4y}\right)}_{}$

$= 4y \cdot \text{Log}(3{,}2)$

$4y = \frac{\text{Log}(x/5)}{\text{Log}(3{,}2)}$

Donc $y = \frac{\text{Log}(x/5)}{4\text{Log}(3{,}2)}$

b) $x = 2\ln(3y)$ $\Rightarrow$ $y = ?$

$\frac{x}{2} = \ln(3y)$

$e^{x/2} = 3y$

$y = \frac{1}{3} e^{x/2}$

Exercice 10.25: Transformer les formules en faisant apparaître des log :

a) $x = 10^y$ $\Rightarrow$ $y = ?$
b) $x = 3^{y+1}$ $\Rightarrow$ $y = ?$
c) $x = e^{10y-2}$ $\Rightarrow$ $y = ?$
d) $x = 4{,}5^{0{,}8y} + 1$ $\Rightarrow$ $y = ?$
e) $4 = 3\,(1{,}02)^n$ $\Rightarrow$ $n = ?$
f) $C(n) = C_0\,(1 + t)^n$ $\Rightarrow$ $n = ?$

Exercice 10.26: Transformer les formules en faisant apparaître des 10^x ou e^x:

a) $x = \text{Log}\, y$ $\Rightarrow$ $y = ?$
b) $x = \frac{\text{Log}(2y)}{5}$ $\Rightarrow$ $y = ?$
c) $x = 3\ln(4y)$ $\Rightarrow$ $y = ?$
d) $x = 0{,}25\ln(0{,}2y) - 3{,}5$ $\Rightarrow$ $y = ?$

10.6 Retour aux phénomènes de croissance exponentielle

Introduction : Avec les outils développés précédemment, nous pouvons nous concentrer à nouveau sur des problèmes concrets de croissances (ou décroissances) exponentielles.

Modèle 12 : Une grande chaîne de magasins au logo orange veut informer la population des nouvelles offres promotionnelles. On a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après t jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction :

$$P(t) = 1 - e^{-0,21t}$$

Modèle de croissance:

a) Quelle proportion de la population sera informée après 3 jours ?
b) Après combien de jours, la grande chaîne de magasins pourra-t-elle considérer que 90% de la population est au courant de ces nouvelles offres ?

a) $P(3) = 1 - e^{-0,21 \cdot 3} \cong 0,467 = 46,7\%$

b) On cherche t tq.

$$1 - e^{-0,21 \cdot t} = 0,9$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,1 = e^{-0,21 \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(0,1) = -0,21 \cdot t$$

donc $t = \dfrac{\ln(0,1)}{-0,21} \cong 10,96$

↳ <u>11 jours</u>

Exercice 10.27: La population d'une ville est de 20'000 habitants et en tenant compte des taux de mortalité et de natalité, on a établi que la population est décrite en fonction du temps t en années par le modèle:

$$P(t) = 20'000e^{0,05t}$$

Dans combien de temps la population aura-t-elle doublé ?

Exercice 10.28: *Le 12 octobre 1999, la population mondiale a été estimée à 6 milliards. Comment cette date a-t-elle été obtenue ?*

Les démographes utilisent des modèles mathématiques basés sur la fonction exponentielle : e^x.
En dessous du tableau et du graphique, vous trouverez 3 modèles datant de 1976 permettant de prédire l'évolution de la population.

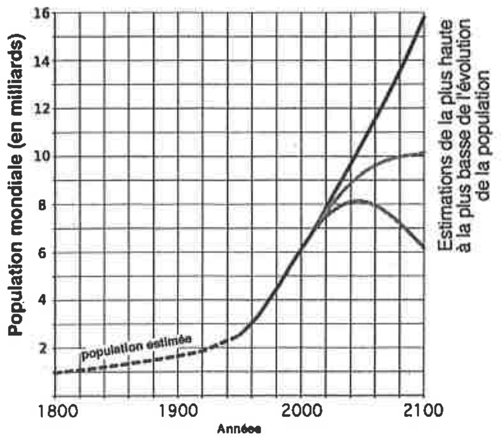
La population mondiale a atteint :

0,3 milliard en	0001	
1 milliard en	1804	
2 milliards en	1927	(123 ans plus tard)
3 milliards en	1960	(33 ans plus tard)
4 milliards en	1974	(14 ans plus tard)
5 milliards en	1987	(13 ans plus tard)
6 milliards en	1999	(12 ans plus tard)
7 milliards en	2011	(12 ans plus tard)

La population mondiale devrait atteindre :

entre 8,1 et 10,8 milliards en 2050
entre 6,2 et 15,8 milliards en 2100

Sources: Nations Unies 2010



Prédictions de l'évolution de la population mondiale.

En 1976, on utilisait trois modèles essayant de décrire l'évolution de la population mondiale. Supposons que $P(t)$ exprime la population mondiale (en milliards d'habitants) prévue pour l'année $1976 + t$.

modèle n°1	modèle n°2	modèle n°3
$P_1(t) = 4 \cdot e^{0{,}02t}$	$P_2(t) = 20 - 16 \cdot e^{-0{,}005t}$	$P_3(t) = \dfrac{20}{1 + 4 \cdot e^{-0{,}025t}}$

a) En déduire la population mondiale en 1976 (selon les 3 modèles).

b) Compléter puis comparer les populations mondiales obtenues à l'aide des 3 modèles aux valeurs obtenues par le "U.S. Bureau of the Census".

	"U.S. Bureau of the Census"	modèle n°1	modèle n°2	modèle n°3
1990	*5'283'755'345*			
1999	*6'002'509'427*			

c) Dire pour chacun des 3 modèles en quelle année la population sera de 10 milliards. (soit $P(t) = 10$)

(Vous constaterez que ces modèles ne sont plus en accord avec les prédictions actuelles.)

Modèle 13 : Une firme d'informatique vient d'acquérir de nouveaux ordinateurs au coût de 400'000 Fr. et ces équipements se déprécient de 20% par année. Après combien d'années ces équipements ne vaudront-ils plus que la moitié de leur valeur initiale.

Modèle de décroissance:

$V(n) = 400'000 \cdot 0,8^n$

On veut n t.q. $200'000 = 400'000 \cdot 0,8^n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0,8^n$

$\Leftrightarrow \text{Log}(1/2) = n \,\text{Log}(0,8)$

$\Rightarrow n = \dfrac{\text{Log}(1/2)}{\text{Log}(0,8)} \simeq 3,1$

$\sim$ 3 ans.

Exercice 10.29: Une compagnie renouvelle sa machinerie au prix de 300'000 €. Sachant que cette machinerie se déprécie au taux de 20% par année, on a établi que la valeur n années après l'achat est donnée par:

$$V(n) = 300'000\,(0,8)^n$$

À l'aide de ce modèle, déterminer dans combien de temps la machinerie vaudra la moitié de sa valeur d'achat ? Le tiers ? Le quart ? Le cinquième ?

Exercice 10.30: On recense chaque année la population d'un pays et on constate que le nombre d'habitants augmente régulièrement de 2% par an. Au bout de combien d'années le nombre d'habitants aura-t-il doublé ?

a) En considérant une population de départ de $P_0 = 10'000$.
b) En considérant une population de départ de $P_0 = 20'000$.
c) Que constatez-vous ?

Modèle 14 : Trouver le modèle exponentiel donnant la valeur d'un capital Q_0 placé à 8,5% d'intérêt capitalisé annuellement.
Dans combien de temps le capital aura-t-il doublé ?

Modèle de croissance:

$Q(t) = Q_0 \cdot 1{,}085^n$

On veut t t.q. $2Q_0 = Q_0 \cdot 1.085^n$

$\Leftrightarrow 2 = 1{,}085^n$

$\Leftrightarrow n = \frac{\log(2)}{\log(1{,}085)} \simeq$ 8 ans et demi.

Exercice 10.31: Un sel radioactif se désintègre de telle sorte qu'à la fin de chaque année, il reste les 49/50 de la quantité au début de l'année.
À partir de ces données, on a établi que la quantité de ce sel après n années était décrite par le modèle :

$$Q(n) = Q_0(0{,}98)^n$$

a) Dans combien de temps la quantité initiale aura-t-elle diminué du quart ? De la moitié ? Des trois quarts ?

b) Sachant que la *période* d'un élément radioactif est le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de la quantité initiale, quelle est la période de ce sel radioactif ?

Exercice 10.32: Au cours d'une enquête sur la population d'un canton rural, on a constaté une diminution du nombre d'habitants d'environ 5% chaque année.
Calculer au bout de combien d'années la population P_0 aura diminué de moitié.

Exercice 10.33: Une forêt renferme aujourd'hui 200'000 m^3 de bois.

a) Combien en contenait-elle il y a 15 ans, si l'accroissement annuel est de $3\frac{1}{4}$ % ?

b) Dans combien d'années cette forêt contiendra-t-elle plus de 300'000 m^3 ?

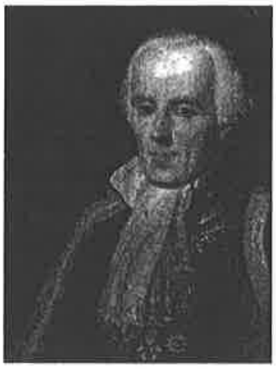
En conclusion : *Il y aurait encore bien des choses à dire au sujet des exponentielles et des logarithmes:*

- *Mentionnons l'existence de 3 formules se trouvant dans votre formulaire :*

1.	$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$
2.	$\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
3.	$\log\left(x^n\right) = n \cdot \log(x)$

- *Pierre-Simon de Laplace disait à leurs propos:*

> *« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes »*



Pierre-Simon de Laplace
mathématicien et astronome français
1749 - 1827

Objectif Lune (page 5)