

## Thème 14: Analyse combinatoire

**Introduction :** L'analyse combinatoire est l'étude des différentes manières de ranger des objets et permet de répondre à des questions telles que: "Combien de nombres de quatre chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 ?" ou bien "Dans une classe de 24 élèves, on doit élire deux délégués de classe. Combien existe-t-il de paires différentes possibles ?"

La connaissance de ces méthodes de dénombrement est indispensable au calcul élémentaire des probabilités.

### 14.1 Principe général

**Exemple d'introduction:** Supposons que trois équipes participent à un tournoi dans lequel sont déterminées une 1<sup>ère</sup>, une 2<sup>ème</sup> et une 3<sup>ème</sup> place.

Combien de classements différents peut-on obtenir à la fin de la compétition ?

**1<sup>ère</sup> méthode:** Pour faciliter l'identification des équipes, nous allons les désigner par les lettres A, B, C.

En **énumérant** les différents classements possibles, on en obtient 6. En effet :

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Mais qu'en serait-il dans le cas d'une compétition de 10 équipes ? Comment s'assurer avec la méthode précédente de ne pas oublier quelques configurations ?

**2<sup>ème</sup> méthode:** On modélise la situation sous la forme de gobelets, dans lesquels, on compte le nombre de possibilités de les remplir :

#### La méthode des gobelets

• Soit par rapport au classement

3

1<sup>ère</sup> place

2

2<sup>ème</sup> place

1

3<sup>ème</sup> place

• Soit par rapport à l'équipe

3

équipe A

2

équipe B

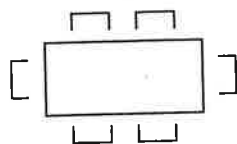
1

équipe C



Dans cet exemple, on constate que l'on peut dénombrer soit par rapport au classement, soit par rapport à l'équipe. Ce ne sera pas toujours le cas. Il s'agira alors de choisir le bon titre des gobelets.





**Exercice 14.9:** Lors d'un repas, on place 6 personnes autour d'une table rectangulaire.

Pour simplifier la rédaction de l'exercice, on appellera ces 6 personnes: A, B, C, D, E et F.

De combien de manières peut-on les placer, si l'on veut que les personnes A et B soient l'une en face de l'autre ?

**Exercice 14.10:**

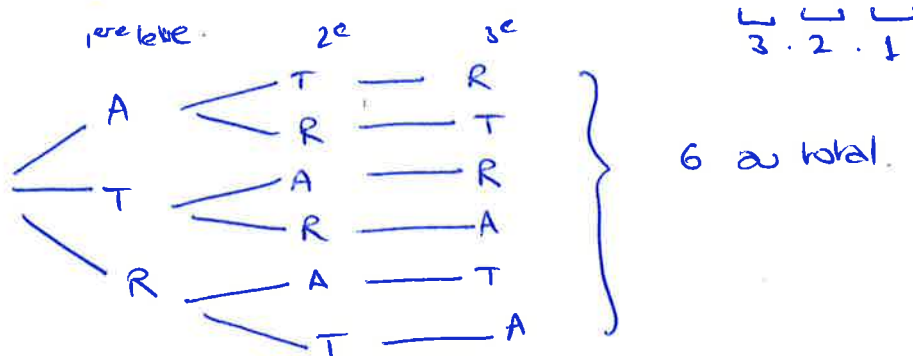
Une valise dispose de deux serrures à chiffres. Chaque serrure renferme un code à trois chiffres obtenus en tournant trois cylindres numérotés de 0 à 9.

Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?

## 14.2 Les permutations

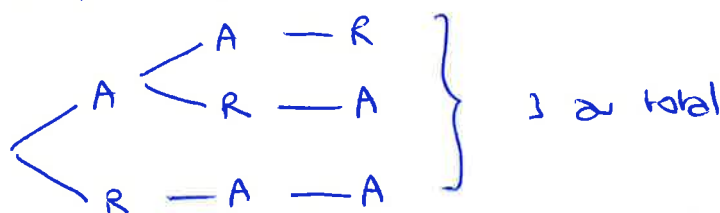
**Ex. d'introduction 1:** Combien d'anagrammes du mot ART peut-on former ?

ART, ATR, RAT, RTA, TAR, TRA.



**Ex. d'introduction 2:** Même question avec le mot ARA.

ARA, AAR, RAA



3 · 2 · 1  
 Mais : les A sont  
 interchangeables  
 →  $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$

---

**Définition:** On a  $n$  objets. On appelle **permutation** une disposition ordonnée de tous ces objets.

---

**Remarques:**

- Selon le modèle gobelet, il y a autant de gobelets que d'objets à y introduire. Dans chaque gobelet, il y aura finalement qu'un seul objet.
- L'ordre est important.
- La famille d'objets à placer dans les gobelets peut contenir plusieurs copies identiques d'un ou plusieurs objets. Dans ce cas, rien ne distingue les permutations de ces objets entre eux et on parle alors de permutation de  $n$  objets avec répétitions.

---

**Notation:**

- $P_n$  : nombre de permutations de  $n$  objets distincts.
- $\bar{P}_n(r_1; \dots; r_k)$  : nombre de permutations de  $n$  objets avec répétitions où  $r_1, \dots, r_k$  désignent le nombre le nombre d'objets identiques.

---

**Exemples:**

- 1) Le nombre de permutations des lettres du mot GYMNASE est  $P_7$ .
- 2) Le nombre de permutations des lettres du mot PROFESSIONS est  $\bar{P}_{11}(3; 2)$  ou  $\bar{P}_{11}(2; 3)$ .

---

**Formule:**

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

*Justification:*

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots$

n choix pour le 1er objet    puis n-1    etc...

---

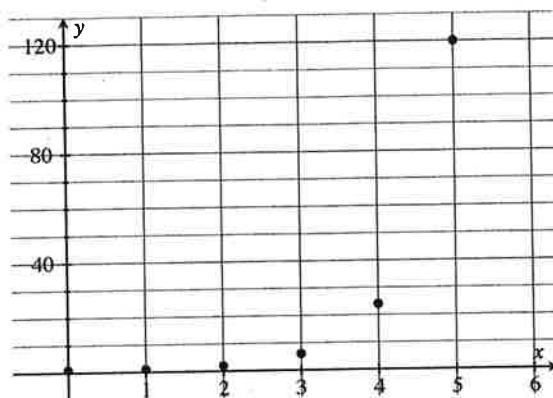
**Définition:** On appelle “ $n$  factorielle” ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et l'on note  $n!$  le produit défini par

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

De plus, on pose par convention  $0! = 1$ .

**Exemples :**  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$   
 $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$   
 $10! = 3'628'800$

**Remarques :** 1) La fonction factorielle a une croissance spectaculaire :



2) Vous trouverez sur votre calculatrice la touche  $\boxed{x!}$  ou  $\boxed{n!}$

**Formules :**

$$P_n = n!$$

$$\bar{P}_n(r_1; \dots; r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

*Justification :*

On commence par placer les  $n$  objets :  $n!$   
 Comme  $r_1$  sont indistinguables, on en a compté  $r_1!$   
 de trop. Idem pour  $r_2, \dots, r_k$ .

Au total : 
$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

**Modèle 3:** Déterminer le nombre d'anagrammes du mot DIPLÔMES et du mot MATURITÉ.

DIPLÔMES :  $P_8 = 8! = 40'320$

MATURITÉ :  $P_8(2) = \frac{8!}{2} = 20'160$

**Modèle 4:** Un étudiant possède, parmi ses livres, 5 livres de math, 3 livres d'histoire et 8 livres en allemand. De combien de manières peuvent-ils être rangés sur une étagère si les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres.

$$\begin{aligned} & \text{Il a } 8 + 5 + 3 = 16 \text{ livres.} \\ & \overline{P}_{16}(8, 5, 3) = \frac{16!}{8! \cdot 5! \cdot 3!} = 720 \cdot 720 \\ & 3! \cdot 8! \cdot 5! \cdot 3! = 174 \cdot 182 \cdot 400 \end{aligned}$$



Il faut décomposer chronologiquement les différentes étapes de rangement, les dénombrer afin de multiplier ensuite les réponses individuelles obtenues.

**Exercice 14.11:** Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MORGES ?

**Exercice 14.12:** Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MISSISSIPPI ? Parmi ces anagrammes, combien commencent et se terminent par la lettre S ?

**Exercice 14.13:** Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot TOULOUSE, si les consonnes doivent occuper les 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 7<sup>ème</sup> positions ?

**Exercice 14.14:** Les quatre remplaçants d'une équipe de volley prennent place sur le banc des remplaçants. De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir ?

**Exercice 14.15:** Le client d'une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres d'un code d'accès à quatre chiffres pour le distributeur automatique de billets. Malheureusement, il a oublié le code. Calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code secret.

**Exercice 14.16:** Refaire l'exercice précédent avec les chiffres 2, 4 et 7, en sachant que l'un de ces chiffres se trouve deux fois dans le code d'accès à quatre chiffres.

**Exercice 14.17:** On dispose des sept jetons suivants:

① ① ② ② ② ③ ③

- Combien de nombres de sept chiffres peut-on composer en juxtaposant ces sept jetons ?
- Combien de nombres sont inférieurs à 1'300'000 ?

## 14.3 Les arrangements

**Ex. d'introduction 1 :** Combien de nombres de deux chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 5, 6, 7, 8, 9 ?

$$\overbrace{5} \quad \overbrace{4} = 20$$

**Ex. d'introduction 2 :** Combien de nombres de quatre chiffres peut-on former avec les chiffres 1 et 2 ?

$$\overbrace{2} \quad \overbrace{2} \quad \overbrace{2} \quad \overbrace{2} = 2^4 = 16$$

- Remarques :**
- L'ordre d'écriture est très important: par exemple dans le 1<sup>er</sup> exemple, les nombres 56 et 65 sont différents.
  - Dans le modèle gobelets, il y a plus d'éléments à placer que de gobelets à disposition.

**Définition :** On a  $n$  objets.  
On appelle arrangement sans répétition une disposition ordonnée de  $p$  éléments distincts choisis parmi les  $n$ . ( $1 \leq p \leq n$ )

On note  $A_p^n$  le nombre d'arrangements possibles.

On appelle arrangement avec répétition une disposition ordonnée de  $p$  éléments non forcément distincts choisis parmi les  $n$ .

On note  $\bar{A}_p^n$  le nombre d'arrangements possibles.

**Formule :**

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \quad 1 \leq p \leq n$$

*Justification :*

$$\underbrace{n \quad (n-1) \quad (n-2) \quad \dots \quad (n-p+1)}_{p \text{ gobelets}} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = n!$$



**Remarques :** Cette formule est compatible avec celle des **permutations** dans le cas d'un **arrangement de  $n$  éléments choisis parmi les  $n$**  :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = P_n$$

**Formule :**

$$\overline{A}_p^n = n^p \quad 1 \leq p$$

*Justification :*

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{p \text{ facteurs}}$$

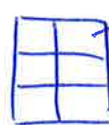
**Modèle 5 :** Déterminer le nombre de mots de quatre lettres distinctes formés avec les lettres du mot DIPLÔME ?

8 lettres :  $A_4^8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

**Modèle 6 :** Dans l'alphabet braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points disposés en un tableau de 3 lignes et 2 colonnes, certains étant en relief. Combien de signes distincts peut-on composer ?

6 emplacements



dans chaque case on peut relever ou pas en relief ou pas

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

il faut enlever celui sans aucun relief  $\Rightarrow 64 - 1 = \underline{63}$

= gymnase de Morges



**Exercice 14.18:** De combien de manières 10 personnes peuvent-elles s'asseoir sur un banc de 4 places ?

**Exercice 14.19:** a) Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots de 5 lettres peut-on former ? (*Les mots n'ont pas nécessairement de signification !*)  
b) Même question, mais en se limitant aux mots formés de 5 lettres différentes.

**Exercice 14.20:** a) Huit personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de cinq places. Combien y a-t-il de possibilités ?  
b) Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de huit places. Combien y a-t-il de possibilités ?  
c) Comment expliquez-vous l'analogie entre ces deux situations ?

**Exercice 14.21:** a) Combien y a-t-il d'initiales possibles formées de deux lettres ?  
b) Combien un village doit-il avoir d'habitants pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

**Exercice 14.22:** On considère les nombres 2, 5 et 7.  
a) Combien peut-on former de nombres de deux chiffres distincts ?  
b) Parmi eux, combien y a-t-il de nombres pairs ?

**Exercice 14.23:** On considère un jeu forain où 4 souris, numérotées de 1 à 4 peuvent se diriger vers 5 cases A, B, C, D et E. Plusieurs souris pouvant choisir la même case. Sur un billet, le joueur inscrit une répartition des souris et il gagne si son pronostic se réalise. Combien de pronostics différents peut-il faire ?

**Exercice 14.24:** Dix chevaux sont au départ d'un grand prix à l'hippodrome de Vincennes. Combien y a-t-il de quartés possibles ?



<http://www.javmath.ch>



## 14.4 Les combinaisons

**Ex. d'introduction 1:** Quatre personnes désirent jouer au tennis de table en double. Combien d'équipes différentes peuvent-elles former ?

A priori:  $\underbrace{\quad}_{4 \cdot 3}$  Mais, si on choisit AB ou BA, on obtient la même équipe.  
 $\Rightarrow$  il y a donc  $\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{A_2^4}{2!} = 6$  possibilités

- Remarques:**
- Une combinaison est caractérisée uniquement par le choix des objets.
  - Une combinaison n'est pas caractérisée par l'ordre des objets. L'équipe  $\{1; 2\}$  ne diffère pas de l'équipe  $\{2; 1\}$ .
  - On ne peut pas utiliser le modèle gobelet, car celui-ci induit un choix ordonné ; ce qui n'est pas le cas lors de combinaisons.

**Définition:** On appelle combinaison une disposition non ordonnée de  $p$  éléments distincts choisis parmi les  $n$ . ( $1 \leq p \leq n$ )

On note  $C_p^n$  le nombre de combinaison possible.

**Formule:**

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{P_p} \quad 1 \leq p \leq n$$

*Justification :*

Par compter le nombre de choix de  $p$  objets parmi, sans tenir compte de l'ordre, on compte le nombre de choix avec ordre, donc  $A_p^n$ , puis on divise par les permutations des  $p$  objets entre eux (pour supprimer l'ordre)

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{P_p} = A_p^n \cdot \frac{1}{P_p} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Formule :

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \quad 1 \leq p \leq n$$

Remarques : • Par convention de calcul, on a  $C_0^n = 1$  et  $C_0^0 = 1$ .

- La notion de combinaison avec répétitions existe, mais nous ne l'étudierons pas dans le cadre de ce cours.

Modèle 7 : De combien de manières différentes peut-on former un comité de trois personnes à partir d'une classe de 24 élèves ?

C'est  $C_3^{24} = \frac{24!}{3! \cdot 21!} = 2024$

Modèle 8 : • Combien de mains différentes de six cartes peut-on obtenir à partir d'un jeu de 36 cartes ?

- Parmi celles-ci, combien contiennent les 4 valets ?
- Combien contiennent au moins 1 valet ?

• C'est  $C_6^{36} = \underline{1\,947\,792}$

• On choisit les 4 valets :  $C_4^4 = 1$  (1 seule possibilité)  
 puis 2 autres cartes parmi les 32 restantes :  
 $C_2^{32} = 496$ . Au total :  $1 \cdot 496 = \underline{496}$

• Attention avec les "au moins"

Pl.  $\heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit$  } compte 2 fois.  
 ou  $\heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit \heartsuit \spadesuit \clubsuit \diamondsuit$

Donc : on calcule toutes les possibilités - celles sans valet  
 $\Rightarrow C_6^{36} - C_6^{32} = \underline{1\,041\,600}$



Dans le cas de « au moins un », on dénombre la situation « aucun » que l'on déduit du dénombrement « total ».

**Exercice 14.25:** 12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

**Exercice 14.26:** Vous devez organiser un tournoi de tennis dans le cadre de votre club. Il y a 9 personnes inscrites qui devront toutes jouer une fois contre leur adversaire. Combien de matchs vont devoir se dérouler ?

**Exercice 14.27 :** Un marchand de glaces a en stock 31 parfums différents. Il se vante de proposer environ 4500 glaces différentes à trois boules, chaque boule étant d'un parfum différent. Comment ce nombre a-t-il été obtenu ?

**Exercice 14.28:** Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut former une commission de 7 membres comprenant 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

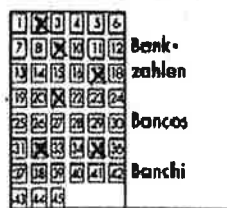
**Exercice 14.29:** De combien de façons peut-on choisir une main de 5 cartes dans un jeu de 36 cartes, si l'on veut que ces 5 cartes contiennent :

- les 4 as ?
- 2 as et 2 roi ?
- au moins un as ?

**Exercice 14.30:** Un atelier comprend 15 ouvriers, 8 femmes et 7 hommes. On choisit dans cet atelier des groupes de 5 ouvriers.

- Combien de groupes différents peut-on former ?
- Combien de groupes comportant 3 hommes peut-on former ?

**Exercice 14.31:** a) De combien de façons peut-on remplir une feuille de loterie à numéros (choisir 6 numéros parmi 45) ?



b) Parmi toutes les possibilités, combien permettent de réaliser :

Aucun gain :	0 bon numéro,
	1 bon numéro,
	2 bons numéros,
Un gain de 6.- :	3 bons numéros,
Un gain de 50.- :	4 bons numéros,
Un gain de 3500.- :	5 bons numéros,
Le Jackpot :	6 bons numéros ?

c) Combien permettent d'obtenir au moins un gain ?



<http://www.javmath.ch>



## 14.5 Permutation - Arrangement - Combinaison lequel choisir ?

**Exemple:** Une urne contient les 6 jetons suivants :

{ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ }

- On tire simultanément 5 jetons. Combien de tirages différents contenant 2 chiffres pairs et 3 impairs peut-on avoir ?
- On tire successivement les 6 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents formés des 6 chiffres peut-on ainsi avoir ?
- On tire successivement 4 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents peut-on avoir ?
- On tire simultanément 4 jetons. Combien de tirages différents peut-on avoir ?
- On répète 4 fois l'opération suivante :  
On tire 1 jeton, on note le chiffre obtenu puis on le remet dans l'urne.  
Combien de nombres différents peut-on avoir ?

a)  $C_2^3 \cdot C_3^3 = 3$  (simultanément  $\Rightarrow$  1<sup>er</sup> ordre ne compte pas)

b)  $P_6 = 6! = 720$  (l'ordre compte !)

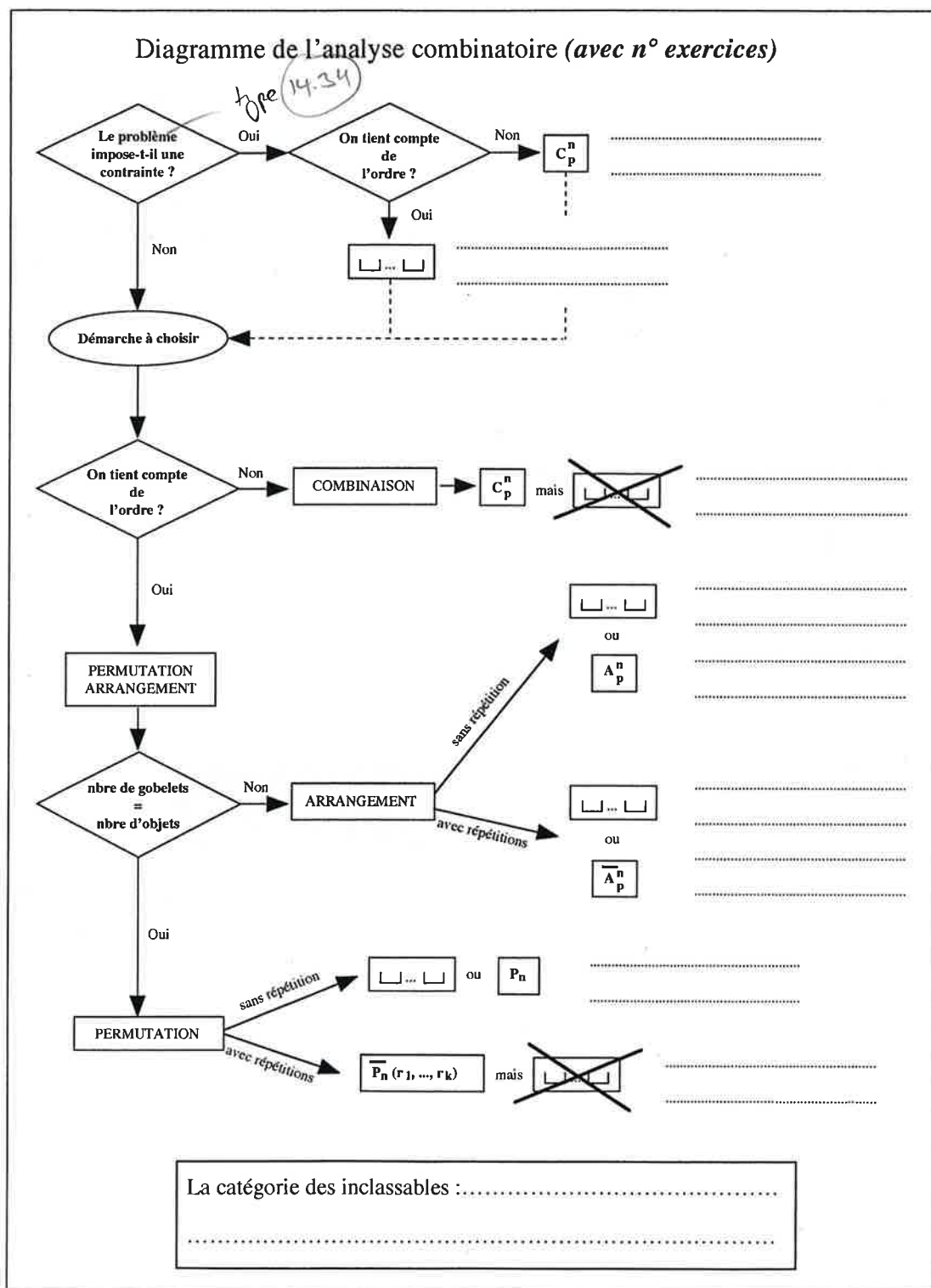
c)  $\underbrace{A_4^6}_{\text{l'ordre compte}} = \underbrace{C_4^6}_{\text{on les choisit sans ordre}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{puis on les permute}} = 360$

d)  $C_4^6 = 15$

e)  $\bar{A}_4^6 = 6^4 = 1296$

?	Comment savoir dès le départ la <b>bonne</b> formule à utiliser $P_n$ ; $\bar{P}_n(r)$ ; $A_p^n$ ; $\bar{A}_p^n$ ; $C_p^n$ ; "gobelets"	?
---	--	---

On peut utiliser alors le diagramme suivant :



Il est important de bien décoder le problème pour repérer si l'ordre a de l'importance dans le dénombrement. En particulier, si les mots suivants apparaissent:

SUCCESSIVEMENT  $\Rightarrow$

SIMULTANÉMENT  $\Rightarrow$

*l'ordre compte*

*l'ordre ne compte pas*

**Exercice 14.32:** Dans une course, 12 chevaux prennent le départ.

- a) De combien de manières peut se présenter le tableau d'arrivée des trois premiers ? (tiercé dans l'ordre)
- b) Combien de trios de gagnant peut-on avoir ? (tiercé dans le désordre)

**Exercice 14.33:**

- a) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire 3 simultanément. Déterminer le nombre de tirages différents.
- b) Même question si l'on tire successivement ces trois boules.
- c) Même question si après chaque tirage on remet la boule dans l'urne.

**Exercice 14.34:** Combien de nombres de 3 chiffres, non forcément distincts, peut-on former avec les 6 chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ? Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ? pairs ? multiple de 5 ?

**Exercice 14.35:**

- a) Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'un examen écrit. Combien de choix peut-il faire ?
- b) Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre les 3 premiers problèmes ?
- c) Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre 4 des 5 premiers problèmes ?

**Exercice 14.36:**



- a) Combien de séquences différentes peut-on lire sur un compteur kilométrique de voiture ? (Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9).
- b) Parmi les configurations ci-dessus, combien y en a-t-il où figure exactement trois fois le chiffre 7 ?

**Exercice 14.37:** De combien de manières peut-on asseoir 8 personnes (A, ..., H) en rang si:

- a) aucune restriction n'est mise;
- b) les personnes A et B veulent être l'une à côté de l'autre;
- c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement, en supposant qu'il y a 4 hommes et 4 femmes.

**Exercice 14.38:** Parmi les 10 participants à un tournoi d'échecs, on compte 4 Russes, 3 Américains, 2 Anglais et un Brésilien. Dans le classement du tournoi, on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs, mais pas leur identité. Combien de classements peut-on envisager ?



**Exercice 14.39:** Combien peut-on former de nombres de 8 chiffres avec deux 4, quatre 2 et deux 3 ?

**Exercice 14.40:** On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes.

- a) Combien y a-t-il de mains possibles ?
- b) Combien y a-t-il de mains formées d'un roi et deux as ?
- c) Combien y a-t-il de mains ne contenant aucun as ?
- d) Combien y a-t-il de mains contenant au moins un as ?
- e) Combien y a-t-il de mains contenant exactement un as ?

**Exercice 14.41:** Combien de salades différentes peut-on préparer à partir d'un choix de laitue, scarole, endive, cresson et chicorée amère ?  
(Considérez d'abord le nombre possible constitué d'un légume, puis de deux ...)

**Exercice 14.42:** Un avion comporte huit places numérotées. Il doit transporter seize personnes en deux voyages.

- a) Combien y a-t-il de possibilités d'attribuer les huit sièges numérotés du premier vol ?
- b) Avant les deux embarquements, on distribue au passager un ticket formé de deux chiffres. Le premier chiffre correspond au numéro du vol et le deuxième chiffre au numéro du siège (par exemple, le ticket 27 correspond à la place numéro 7 du deuxième vol).  
Combien y a-t-il de possibilités de distribuer ces tickets aux passagers ?
- c) Combien de groupes différents de personnes peut-on former pour le premier voyage ?

**Exercice 14.43:**

- a) Une jeune fille se fait consciencieusement les ongles un par un. Combien a-t-elle de manières différentes d'opérer en traitant tous les ongles d'une même main avant de passer à l'autre ?
- b) La semaine suivante, elle désire à nouveau se faire les ongles, mais en y ajoutant un petit peu d'originalité:  
D'abord sur sa main gauche, elle utilise le vernis rouge sur trois doigts et le vernis noir sur les deux autres. Puis sur sa main droite, elle utilise le vernis rouge sur deux doigts et le vernis noir sur les trois autres.  
Combien a-t-elle alors de possibilités différentes de se vernir les ongles des deux mains ?  
(il s'agit donc bien de dénombrer le nombre de configurations différentes)



<http://www.javmath.ch>

