Fonctions quadratiques: série A

Nom : .... Prénom : ....

- **Donner le détail des calculs et justifier tous les raisonnements.**
- Les raisonnements et les réponses doivent être rédigés, **de manière soignée**, sur une feuille A4 séparée, quadrillée avec des marges.

Exercice 1

Considérons la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 5x + 6$.

a) Déterminer son orientation.

b) Déterminer les coordonnées de tous ses points d'intersection avec les axes de coordonnées.

c) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.

d) Dessiner son graphe.

Solution

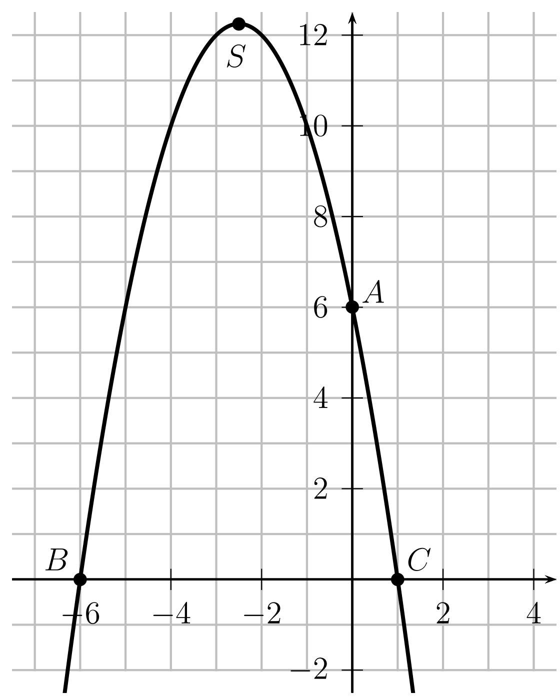
a) Comme $a = -1 < 0$, la parabole "n'est pas contente".

b) Pour déterminer l'intersection du graphe de f avec l'axe des y, on calcule $f(0) = 6$ (son ordonnée à l'origine). Donc le graphe de la fonction croise l'axe en $A(0; 6)$.

Pour déterminer l'intersection du graphe de f avec l'axe des x, on résout l'équation $-x^2 - 5x + 6 = 0$, que l'on peut diviser par -1, ce qui donne $x^2 + 5x - 6 = 0$. Pour trouver ses solutions, on peut soit appliquer la formule, soit trouver deux nombres dont le produit donne -6 et la somme 5, à savoir $a = 6$ et $b = -1$. Donc

$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$$

qui s'annule en $x = -6$ et en $x = 1$. Ainsi le graphe de la fonction croise l'axe des x en $B(-6; 0)$ et en $C(1; 0)$.



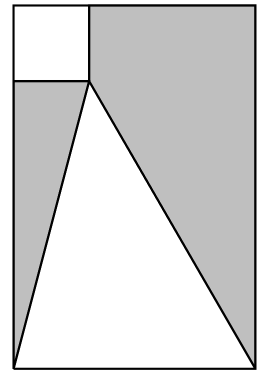
c) Pour déterminer le sommet, on utilise la formule

$$x_S = -\frac{-10}{2 \cdot (-1)} = -\frac{5}{2} = -2{,}5 \text{ et}$$

$$y_S = f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} - 5 \cdot \frac{-5}{2} + 6 = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

donc $S(-2{,}5; 12{,}25)$.

Exercice 2



Dans un rectangle de 12 cm de largeur et de 8 cm de longueur, on considère la surface grisée ci-contre.

a) Si x désigne la mesure du côté du petit carré, déterminez la valeur de x pour que l'aire grisée soit maximale.

b) Déterminez la valeur de cette aire.

Solution
Pour déterminer l'aire grisée, on additionne l'aire du triangle rectangle et celle du trapèze dont le petit côté vaut x.

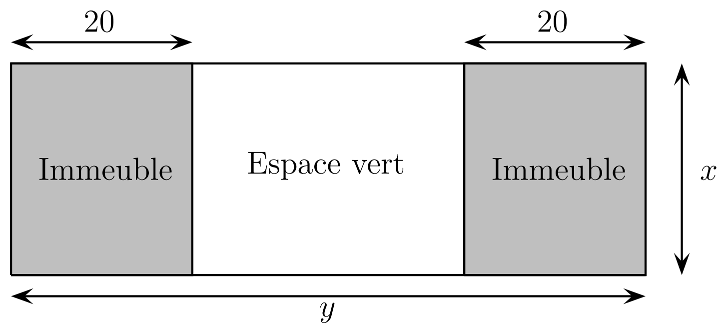
L'aire du triangle vaut $\dfrac{(12-x)x}{2}$, celle du trapèze vaut $\dfrac{(12+x)(8-x)}{2}$, et par conséquent, l'aire cherchée vaut

$$f(x) = \frac{(12-x)x + (12+x)(8-x)}{2} = \frac{12x - x^2 + 96 + 8x - 12x - x^2}{2} = \frac{-2x^2 + 8x + 96}{2}$$

Ainsi $f(x) = -x^2 + 4x + 48$. Son graphe est une parabole “pas contente”, donc f atteint son maximum pour $x = x_S = -\frac{-8}{-4} = 2\,\text{cm}$. L'aire correspondante vaut $-2^2 + 4 \cdot 2 + 48 = 52\,\text{cm}^2$.

Exercice 3

Sur une parcelle de terrain de largeur y mètres, on construit deux immeubles identiques d'une largeur de 20 mètres et d'une longueur de x mètres selon le plan ci-contre. Entre les deux immeubles, on impose la présence d'un espace vert d'un périmètre de 200 mètres.



a) Montrer que l'aire de l'espace vert s'exprime en fonction de x par $f(x) = -x^2 + 100x$.

b) Déterminer les dimensions x et y de la parcelle pour que l'aire de l'espace vert soit maximale.

c) Calculer la valeur de cette aire maximale.

Solution

a) L'aire de l'espace vert est égale à $(y - 2 \cdot 20) \cdot x$. Pour tout exprimer en fonction de x, il faut utiliser la contrainte, à savoir que le périmètre de cette espace vert mesure 200 mètres :
$$2 \cdot (y - 2 \cdot 20) + 2 \cdot x = 200$$
donc $2x + 2y - 80 = 200$ ou encore $x + y = 140$, donc $y = 140 - x$. Ainsi l'aire vaut $f(x) = (140 - x - 40) \cdot x = -x^2 + 100x$.

b) Comme le graphe de f est une parabole “pas contente", la fonction est maximale en $x_S = \frac{-100}{2 \cdot -1} = 50$. Il faut donc choisir 50 mètres de longueur pour les bâtiments et $y = 140 - 50 = 90$ mètres pour la largeur de la parcelle.

c) L'aire vaudra alors $50 \cdot (90 - 40) = 2500$ m^2.

Rédaction et soin (2 pt)

Fonctions quadratiques: série B

Nom : .... Prénom : ....

- **Donner le détail des calculs et justifier tous les raisonnements.**
- Les raisonnements et les réponses doivent être rédigés, **de manière soignée**, sur une feuille A4 séparée, quadrillée avec des marges.

Exercice 1

Considérons la fonction f définie par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

a) Déterminer son orientation.

b) Déterminer les coordonnées de tous ses points d'intersection avec les axes de coordonnées.

c) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.

d) Dessiner son graphe.

Solution

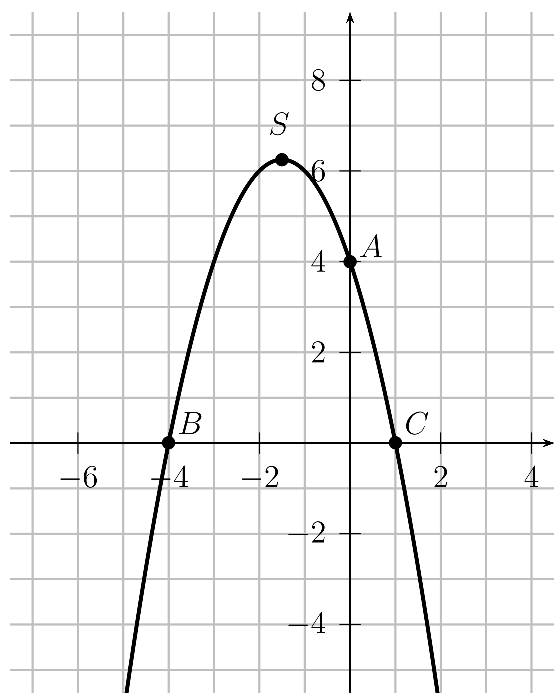
a) Comme $a = -1 < 0$, la parabole "n'est pas contente".

b) Pour déterminer l'intersection du graphe de f avec l'axe des y, on calcule $f(0) = 4$ (son ordonnée à l'origine). Donc le graphe de la fonction croise l'axe en $A(0; 4)$.

Pour déterminer l'intersection du graphe de f avec l'axe des x, on résout l'équation $-x^2 - 3x + 4 = 0$, que l'on peut diviser par -1, ce qui donne $x^2 + 3x - 4 = 0$. Pour trouver ses solutions, on peut soit appliquer la formule, soit trouver deux nombres dont le produit donne -4 et la somme 3, à savoir $a = 4$ et $b = -1$. Donc

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$$

qui s'annule en $x = -4$ et en $x = 1$. Ainsi le graphe de la fonction croise l'axe des x en $B(-4; 0)$ et en $C(1; 0)$.



c) Pour déterminer le sommet, on utilise la formule

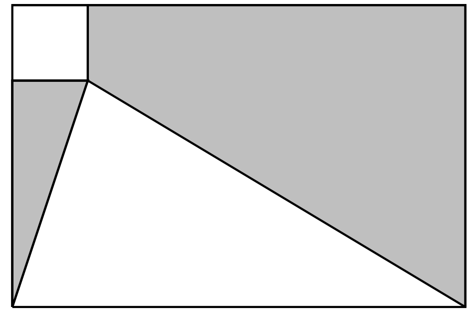
$$x_S = -\frac{-3}{2 \cdot (-1)} = -\frac{-3}{2} = -1{,}5 \text{ et}$$

$$y_S = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{-3}{2} + 4 = \frac{25}{4} = 6{,}25$$

donc $S(-1{,}5; 6{,}25)$.

Exercice 2

Dans un rectangle de 8 cm de largeur et de 12 cm de longueur, on considère la surface grisée ci-contre.



a) Si x désigne la mesure du côté du petit carré, déterminez la valeur de x pour que l'aire grisée soit maximale.

b) Déterminez la valeur de cette aire.

Solution

Pour déterminer l'aire grisée, on additionne l'aire du triangle rectangle et celle du trapèze dont le petit côté vaut x.

L'aire du triangle vaut $\dfrac{(12-x)x}{2}$, celle du trapèze vaut $\dfrac{(12+x)(8-x)}{2}$, et par conséquent, l'aire cherchée vaut

$$f(x) = \frac{(8-x)x + (8+x)(12-x)}{2} = \frac{8x - x^2 + 96 + 12x - 8x - x^2}{2} = \frac{-2x^2 + 12x + 96}{2}$$

Ainsi $f(x) = -x^2 + 6x + 48$.

Son graphe est une parabole “pas contente”, donc f atteint son maximum pour

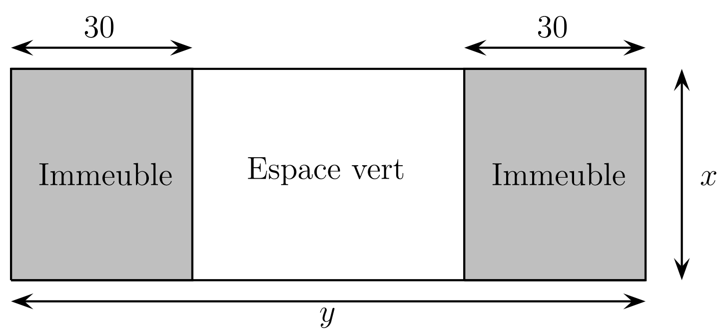
$$x = x_S = -\frac{-12}{-4} = 3{,}0\,\text{cm}$$

L'aire correspondante vaut $-(3)^2 + 6 \cdot 3 + 48 = 57\,\text{cm}^2$.

Exercice 3

Sur une parcelle de terrain de largeur y mètres, on construit deux immeubles identiques d'une largeur de 30 m et d'une longueur de x mètres selon le plan ci-contre.

Entre les deux immeubles, on impose la présence d'un espace vert d'un périmètre de 220 m.



a) Montrer que l'aire de l'espace vert s'exprime en fonction de x par $f(x) = -x^2 + 110x$.

b) Déterminer les dimensions x et y de la parcelle pour que l'aire de l'espace vert soit maximale.

c) Calculer la valeur de cette aire maximale.

Solution

a) L'aire de l'espace vert est égale à $(y - 2 \cdot 30) \cdot x$.

Pour tout exprimer en fonction de x, il faut utiliser la contrainte, à savoir que le périmètre de cet espace vert mesure 240 mètres :

$$2 \cdot (y - 2 \cdot 30) + 2 \cdot x = 220$$

donc $2x + 2y - 120 = 220$ ou encore $x + y = 170$, donc $y = 170 - x$. Ainsi l'aire vaut $f(x) = (170 - x - 60) \cdot x = -x^2 + 110x$.

b) Le graphe de f est une parabole "pas contente", donc la fonction est maximale en

$$x_S = \frac{-110}{2 \cdot (-1)} = 55.$$

Il faut donc choisir 55 mètres de longueur pour les bâtiments et $y = 170 - 55 = 115$ mètres pour la largeur de la parcelle.

c) L'aire vaudra alors $55 \cdot (115 - 60) = 3025$ m^2.

Rédaction et soin (2 pt)