Puissances et racines: série A

Nom : .... Prénom : ....

- **La calculatrice n'est pas autorisée.**
- **Donner le détail des calculs et justifier tous les raisonnements.**
- Les raisonnements et les réponses doivent être rédigés, **de manière soignée**, sur une feuille A4 séparée, quadrillée avec des marges.

Exercice 1

Simplifiez les plus possible les expressions suivantes. **Donner le résultat avec des exposants entiers positifs (donc ni négatifs, ni sous forme de fraction)**.

a) $((-5)^2)^{-1}$ b) $\left(\dfrac{2^3}{16^{\frac{1}{2}}}\right)^3$ c) $\dfrac{9^4 \cdot 3^{-2}}{3^9}$

d) $\sqrt{1600}$ e) $\sqrt[3]{-8}$ f) $16^{\frac{3}{4}} - 8^{\frac{2}{3}} + 100^{\frac{3}{2}}$

Solution

a) $((-5)^2)^{-1} = (5^2)^{-1} = 5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

b) $\left(\dfrac{2^3}{16^{\frac{1}{2}}}\right)^3 = \left(\dfrac{2^3}{2^2}\right)^3 = 2^3 = 8$

c) $\dfrac{9^4 \cdot 3^{-2}}{3^9} = \dfrac{(3^2)^4 \cdot 3^{-2}}{3^9} = \dfrac{3^8 \cdot 3^{-2}}{3^9} = \dfrac{3^6}{3^9} = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

d) $\sqrt{1600} = \sqrt{16 \cdot 100} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 4 \cdot 10 = 40$

e) $\sqrt[3]{-8} = -2$

f) $16^{\frac{3}{4}} - 8^{\frac{2}{3}} + 100^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 + \left(\sqrt{100}\right)^3 = 2^3 - 2^2 + 10^3 = 1004$

Exercice 2

En détaillant le calcul si nécessaire, compléter les écritures suivantes.

a) $9^4 \cdot 3^2 = 3^{\cdots}$ b) $5^5 \cdot 5^{-3} \cdot 5^2 = 25^{\cdots}$ c) $\left(\dfrac{8^2}{4^3}\right)^2 = 2^{\cdots}$

Solution

a) $9^4 \cdot 3^2 = (3^2)^4 \cdot 3^2 = 3^8 \cdot 3^2 = 3^{8+2} = 3^{10}$

b) $5^5 \cdot 5^{-3} \cdot 5^2 = 5^{5-3+2} = 5^4 = 25^2$

c) $\left(\dfrac{8^2}{4^3}\right)^2 = \left(\dfrac{(2^3)^2}{(2^2)^3}\right)^2 = \left(\dfrac{2^6}{2^6}\right)^2 = 1^2 = 1 = 2^0$

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes, en utilisant les trois réflexes liés au calcul avec des racines.

a) $\sqrt{50} + \sqrt{18}$ b) $\sqrt{\dfrac{16}{5}}$ c) $\sqrt[3]{2^9}$

Solution

a) $\sqrt{50} + \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{16}{5}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

c) $\sqrt[3]{2^9} = (2^9)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$

Exercice 4

Sachant que $\sqrt{3} \cong 1,73$ et $\sqrt{30} \cong 5,48$, calculer

a) $\sqrt{300}$ b) $\sqrt{300\ 000}$ c) $\sqrt{0{,}3}$

Solution

a) $\sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3} \cong 17,3$

b) $\sqrt{300000} = \sqrt{10000 \cdot 30} = \sqrt{10000} \cdot \sqrt{30} = 100\sqrt{30} \cong 548$

c) $\sqrt{0,3} = \sqrt{\dfrac{30}{100}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10} \cong 0,548$

Puissances et racines: série B

Nom : .... Prénom : ....

- **La calculatrice n'est pas autorisée.**
- **Donner le détail des calculs et justifier tous les raisonnements.**
- Les raisonnements et les réponses doivent être rédigés, **de manière soignée**, sur une feuille A4 séparée, quadrillée avec des marges.

Exercice 1
Simplifiez les plus possible les expressions suivantes. **Donner le résultat avec des exposants entiers positifs (donc ni négatifs, ni sous forme de fraction)**.

a) $\sqrt{900}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\dfrac{3^8 \cdot 9^{-1}}{3^3}$

d) $\left((-2)^3\right)^{-1}$ e) $\left(\dfrac{16^{\frac{1}{2}}}{2^3}\right)^3$ f) $100^{\frac{3}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}}$

Solution

a) $\sqrt{900} = \sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$

c) $\dfrac{3^8 \cdot 9^{-1}}{3^3} = \dfrac{3^8 \cdot (3^2)^{-1}}{3^3} = \dfrac{3^8 \cdot 3^{-2}}{3^3} = \dfrac{3^6}{3^3} = 3^3 = 27$

d) $\left((-2)^3\right)^{-1} = \left(-2^3\right)^{-1} = -2^{-3} = -\dfrac{1}{2^3} = -\dfrac{1}{8}$

e) $\left(\dfrac{16^{\frac{1}{2}}}{2^3}\right)^3 = \left(\dfrac{2^2}{2^3}\right)^3 = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$

f) $100^{\frac{3}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt{100}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 10^3 - 2^2 + 2^3 = 1004$

Exercice 2
En détaillant le calcul si nécessaire, compléter les écritures suivantes.

a) $2^3 \cdot 2^{-5} \cdot 2^4 = 4^{\cdots}$ b) $25^3 \cdot 5^3 = 5^{\cdots}$ c) $\left(\dfrac{27^2}{9^3}\right)^2 = 3^{\cdots}$

Solution

a) $2^3 \cdot 2^{-5} \cdot 2^4 = 2^{3-5+4} = 2^2 = 4^1$

b) $25^3 \cdot 5^3 = (5^2)^3 \cdot 5^3 = 5^6 \cdot 5^3 = 5^{6+3} = 5^9$

c) $\left(\dfrac{27^2}{9^3}\right)^2 = \left(\dfrac{(3^3)^2}{(3^2)^3}\right)^2 = \left(\dfrac{3^6}{3^6}\right)^2 = 1^2 = 1 = 3^0$

Exercice 3
Simplifier les expressions suivantes, en utilisant les trois réflexes liés au calcul avec des racines.

a) $\sqrt{\dfrac{9}{2}}$ b) $\sqrt{18} + \sqrt{50}$ c) $\sqrt[3]{2^{12}}$

Solution

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{18} + \sqrt{50} = \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{2^{12}} = (2^{12})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4 = 16$

Exercice 4
Sachant que $\sqrt{2} \cong 1,41$ et $\sqrt{20} \cong 4,47$, calculer

a) $\sqrt{200}$ b) $\sqrt{200\ 000}$ c) $\sqrt{0{,}2}$

Solution

a) $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \cong 14,1$

b) $\sqrt{200000} = \sqrt{10000 \cdot 20} = \sqrt{10000} \cdot \sqrt{20} = 100\sqrt{20} \cong 447$

c) $\sqrt{0,2} = \sqrt{\dfrac{20}{100}} = \dfrac{\sqrt{20}}{10} \cong 0,447$