Thème 9: Puissances et racines

9.1 Les puissances entières

Rappels :
- La **puissance n-ème d'un nombre a** est le produit de n facteurs égaux à a.
- a s'appelle **la base** et n **l'exposant** de la puissance.
- On note:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Par convention: $a^0 = 1$ (pour tout $a \neq 0$)

Exemples : a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Propriétés : Soit a et b des nombres réels, m et n des entiers naturels non nuls.

(I) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ • $5^3 \cdot 5^4 = 5^7$

(II) $\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}}$ • $\left(4^2\right)^3 = 4^6$ $4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = (4 \cdot 4)(4 \cdot 4)(4 \cdot 4)$

(III) $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ • $3^2 \cdot (-1)^2 = (-3)^2 = 3^2$

(IV) $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)}$ • $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$

(V) $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } m < n \end{cases}}$

• $\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2$

• $\frac{3^5}{3^9} = \frac{1}{3^{9-5}} = \frac{1}{3^4}$

Modèle 1 : Justifier les réponses suivantes:

a) $7^3 \cdot 7^2 = 7^5$ car c'est la propriété I

b) $\left(7^2\right)^3 = 7^6$ car c'est p II

c) $\frac{3^4}{3^7} = \frac{1}{3^3}$ car c'est p V

Exercice 9.1: Calculer sans machine:

a) $\left(2^2\right)^3$ b) $2^{\left(2^3\right)}$ c) $\left(2^3\right)^2$

d) $2^3 - 3^2$ e) $3^2 + 3^4$ f) $10^3 + 10^2$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ i) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$

j) $\left(\sqrt{2}\right)^4$ k) $\left(\sqrt{5}\right)^6$ l) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8$

Exercice 9.2: Calculer sans machine:

a) $\frac{2^6}{2^2}$ b) $\frac{-2^6}{2^3}$ c) $\frac{(-2)^6}{2^3}$

d) $\frac{2^{10}}{2^{12}}$ e) $\frac{2^4}{-2^5}$ f) $\frac{2^4}{(-2)^5}$

g) $\left(\frac{2}{2^3}\right)^2$ h) $\left(-\frac{2^7}{2^6}\right)^3$ i) $\left(\frac{2^0}{2^2}\right)^2$

j) $\frac{2^{16}}{4^7}$ k) $\frac{9^5}{3^{10}}$ l) $\left(\frac{5^3}{25^2}\right)^2$

Question : $2^3 = 8$. Mais que pourrait valoir 2^{-3} ?

Si on veut garder la p.I , alors $2^{-3} \cdot 2^3 = 2^{-3+3} = 2^0 = 1$

donc $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Définition : Tout en gardant les propriétés précédentes valides, nous allons définir les puissances à exposant négatif par:

$$\text{(VI)} \quad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Modèle 2 : a) $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$

b) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}$

Nouvelles propriétés : À la liste des propriétés précédentes, nous pouvons compléter

(V') $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ • $\dfrac{3^2}{3^9} = 3^{2-9} = 3^{-7}$

(VII) $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n \quad (a, b \neq 0)}$ • $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

Modèle 3 : Justifier la réponse suivante:

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ car $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{3^2/4^2} = 1 \cdot \dfrac{4^2}{3^2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

Exercice 9.3: Calculer sans machine:

a) $2^{-1} \cdot 2^{-2}$ b) $3^{-4} \cdot 3^4$ c) $4^0 \cdot 4^{-5} \cdot 4^3$

d) $a^{-3} \cdot a^4$ e) $\dfrac{2^{-3}}{3^2}$ f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

g) $\dfrac{2^3}{3^{-2}}$ h) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$ i) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$

Modèle 4 : Compléter les écritures suivantes:

a) $2^{-3} \cdot 2^4 = \dfrac{1}{2^{-1}}$ car $2^{-3} \cdot 2^4 = 2^1 = \dfrac{1}{2^{-1}}$

b) $\left(2^{-3}\right)^4 = 4^{-6}$ car $(2^{-3})^4 = 2^{-12} = (2^2)^{-6} = 4^{-6}$

c) $\dfrac{2^5}{4^{-3}} = 2^{11}$ car $\dfrac{2^5}{4^{-3}} = \dfrac{2^5}{(2^2)^{-3}} = \dfrac{2^5}{2^{-6}} = 2^{5-(-6)} = 2^{11}$

d) $\dfrac{9^{-2}}{36^{-2}} = \ldots$ car $\dfrac{9^{-2}}{36^{-2}} = \left(\dfrac{9}{36}\right)^{-2} = \left(\dfrac{36}{9}\right)^2 = 4^2 = 16$

e) $2^{-3} \cdot 5^{-3} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^3$ car $2^{-3} \cdot 5^{-3} = 10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^3$

Exercice 9.4: En détaillant le calcul si nécessaire, compléter les écritures suivantes:

a) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-5} = 2^{\cdots}$ b) $\left(3^4\right)^2 = \dfrac{1}{3^{\cdots}}$ c) $\dfrac{3^8}{3^2} = 9^{\cdots}$

d) $\dfrac{3^2}{3^6} = 9^{\cdots}$ e) $\dfrac{5}{25^2} = 5^{\cdots}$ f) $2^3 \cdot 2^9 = 4^{\cdots}$

g) $36^2 \cdot 6^{-2} = \dfrac{1}{6^{\cdots}}$ h) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = \ldots^3$ i) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{-3} = 5^{\cdots}$

j) $\left(\dfrac{2^3}{2^5}\right)^{-3} = 2^{\cdots}$ k) $\left(\dfrac{2^{-1}}{2^3}\right)^2 = 2^{\cdots}$ l) $\left(\dfrac{3^{-4}}{9^2}\right)^2 = 9^{\cdots}$

9.2 Les racines

Exercice 9.5: Vérifier avec la calculatrice les égalités suivantes:

a) $\sqrt{4+\sqrt{12}} = 1+\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$

Comment pourrait-on les justifier *sans calculatrice* ?

Définition : Soit a un nombre réel positif et n un entier naturel supérieur à 1, on appelle **racine n-ième de a**, noté $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre positif r tel que $r^n = a$. En d'autres termes:

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad r^n = a \text{ et } r \geq 0}$$

- Dans le cas où $n = 2$, la racine 2-ième s'appelle **racine carrée** et se note $\sqrt{\ }$ au lieu de $\sqrt[2]{\ }$.
- Dans le cas où $n = 3$, la racine 3-ième s'appelle **racine cubique**.

Modèle 5 : a) $\sqrt[3]{125} =$ ...5... car ...$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 25 = 125$...

b) $\sqrt[4]{81} =$ ...3... car ...$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 9 \cdot 9 = 81$...

Exercice 9.6: En justifiant dans quelques cas, calculer sans machine:

a) $\sqrt{0}$ b) $\sqrt{0{,}04}$ c) $\sqrt{0{,}0009}$

d) $\sqrt[3]{1000}$ e) $\sqrt[5]{32}$ f) $\sqrt[4]{16}$

g) $\sqrt[3]{0{,}027}$ h) $\sqrt[4]{0{,}0001}$ i) $\sqrt[3]{0{,}125}$

j) $\sqrt{0{,}0001}$ k) $\sqrt[3]{0{,}000008}$

Question : Que pourrait valoir $\sqrt[3]{-125}$?

Ou plus généralement, qu'en est-il de $\sqrt[n]{a}$ si a est négatif ? Il s'agit alors d'étendre la définition pour des valeurs de $a < 0$:

Définition : • Si $a < 0$ et n est un **entier impair**, on définit la racine n-ième par:

$$r = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad r^n = a$$

• Si $a < 0$ et n est un **entier pair**, la racine n-ième de a **n'est pas définie**.

Modèle 6 : a) $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$

b) $\sqrt[4]{-16} =$ n'est pas défini

Exercice 9.7: En justifiant dans quelques cas, calculer sans machine:

a) $\sqrt[3]{-27}$ b) $\sqrt[5]{-1}$ c) $\sqrt[2]{-4}$

d) $\sqrt[3]{(-2)^3}$ e) $\sqrt{(-2)^2}$ f) $\sqrt[3]{-0{,}125}$

g) $\sqrt[3]{-0{,}027}$ h) $\left(\sqrt[4]{-1}\right)^2$ i) $\sqrt{(-2)^4}$

Propriétés : Soit a et b des nombres **réels positifs**, n un entier naturel non nul.

(VIII) $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$ • $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$

(IX) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$ • $\sqrt[3]{5^3} = 5$

(X) $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$ • $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

(XI) $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)}$ • $\sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{5}{2}$

Ginger

Mise en garde : Contrairement au cas de la multiplication, on ne peut pas "casser" la racine d'une somme en somme de racines. Réciproquement, on ne peut pas directement regrouper une somme de racines:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Modèle 7 : Sans calculatrice, calculer:

a) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3} =$ $\sqrt[4]{3^3\cdot 3} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} =$ $\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$

Exercice 9.8: Calculer sans machine:

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt{2^2}$ c) $\sqrt{9+1}$

d) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{32}$ e) $\sqrt{2^6}$ f) $\sqrt{9}+\sqrt{3}$

g) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$ h) $\left(\sqrt[4]{0{,}0001}\right)^4$ i) $\sqrt[5]{2^{10}}$

Modèle 8 : Sachant que $\sqrt{5}\cong 2{,}24$ et $\sqrt{50}\cong 7{,}07$, calculer

a) $\sqrt{500} =$ $\sqrt{5\cdot 100} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{100} = 10\cdot\sqrt{5} = 70{,}7$

b) $\sqrt{0{,}005} =$ $\sqrt{\frac{5}{1000}} = \sqrt{\frac{50}{10000}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{10^4}} \simeq \frac{2{,}24}{100} = 0{,}0224$

Exercice 9.9: Sachant que $\sqrt{27}\cong 5{,}19$ et $\sqrt{270}\cong 16{,}43$, calculer:

a) $\sqrt{2700}$ b) $\sqrt{27'000}$ c) $\sqrt{270'000}$

d) $\sqrt{0{,}27}$ e) $\sqrt{0{,}027}$ f) $\sqrt{0{,}000027}$

Exercice 9.10: Sachant que $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[3]{270}\cong 6{,}46$ et $\sqrt[3]{2700}\cong 13{,}92$, calculer:

a) $\sqrt[3]{27'000}$ b) $\sqrt[3]{270'000}$ c) $\sqrt[3]{2'700'000}$

d) $\sqrt[3]{0{,}27}$ e) $\sqrt[3]{0{,}027}$ f) $\sqrt[3]{0{,}00027}$

Modèle 9 : Sachant que $\sqrt{2}\cong 1{,}41$, estimer sans calculatrice les nombres suivants:

a) $\sqrt{8} =$ $\sqrt{2^2\cdot 2} = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}82$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}705$

c) $\sqrt{\frac{9}{2}} =$ $\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} \simeq 3\cdot 0{,}705 = 2{,}115$

Exercice 9.11: Sachant que $\sqrt{3} \cong 1,73$, estimer sans calculatrice les nombres suivants:

a) $\sqrt{300}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

Les 3 réflexes : a) L'expression sous une racine doit être "la plus petite" possible:

- $\sqrt{72} = \sqrt{9 \cdot 8} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- $\sqrt{49+1} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

b) On ne laisse pas de racine au dénominateur d'une fraction:

- $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}$
- $\dfrac{2}{5\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5 \cdot 5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{25}$

c) On ne laisse pas de racine de fractions:

- $\sqrt{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{4 \cdot 2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

Exercice 9.12: En respectant les 3 réflexes précédents, simplifier:

a) $\sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ c) $\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{2^7} = 8\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{1000} = 20\sqrt{10}$ f) $\sqrt{\dfrac{39}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{13}{2}} = \dfrac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$

g) $\sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ h) $\dfrac{4+\sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$ i) $\dfrac{9}{2\sqrt{3}} = \dfrac{9\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

j) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$ k) $\sqrt{162} = 9\sqrt{2}$ l) $\dfrac{2}{\sqrt{8}} = \dfrac{2\sqrt{8}}{8} = \dfrac{\sqrt{8}}{4}$

9.3 Les puissances à exposants rationnels

Exercice 9.13: À l'aide de la calculatrice, calculer:

a) $25^{\frac{1}{2}}$ b) $27^{\frac{1}{3}}$ c) $27^{\frac{2}{3}}$

Que constatez-vous ?

Définition : Tout en gardant les propriétés précédentes valides, nous allons définir les puissances à exposant rationnel par:

1) Si n est **pair** et a un réel **positif**:

$$\text{(XII)} \quad \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

2) Si n est **impair** et a un réel **quelconque**:

$$\text{(XII')} \quad \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

En effet, dans ce deuxième cas, la racine peut-être calculée même si a est négatif. Par exemple:

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Modèle 10 : Écrire à l'aide d'une racine et simplifier:

a) $4^{\frac{1}{2}} =$ $\sqrt{4} = 2$

b) $5^{-0,5} =$ $\frac{1}{5^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Exercice 9.14: Écrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier:

a) $5^{1/2}$ $= \sqrt{5}$

b) $4^{3/2}$ $= 8$

c) $16^{1/4}$ $= 2$

d) $32^{1/10}$ $= \sqrt{2}$

e) $9^{3/2}$ $= 3^3 = 27$

f) $25^{0,5}$ $= 5$

g) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $= 3$

h) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ $= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

i) $2^{-1/2}$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $9^{-1,5}$ $= \frac{1}{9^{3/2}} = \frac{1}{27}$

k) $5^{6/5}$ $= 5\sqrt[5]{5}$

l) $\frac{2}{8^{1/2}}$ $= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 9.15: Écrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels:

a) $\sqrt[5]{3}$ $= 3^{1/5}$

b) $\sqrt[11]{5^6}$ $= 5^{6/11}$

c) $\sqrt[9]{3^3}$ $= 3^{3/9} = 3^{1/3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $= 2^{-1/2}$

e) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ $= \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}$

f) $\sqrt[3]{3^9}$ $= 3^{9/3} = 3^3$

Modèle 11 : Simplifier les expressions suivantes:

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2^3} =$ $2^{2/3} \cdot 2^{3/2} = 2^{2/3 + 3/2} = 2^{13/6} = \sqrt[6]{2^{13}} = 2^2\sqrt[6]{2}$

b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} =$ $\frac{5^{1/3}}{5^{1/7}} = 5^{\frac{1}{3} - \frac{1}{7}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$

c) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} =$ $\sqrt{2 \cdot 2^{1/2}} = \sqrt{2^{3/2}} = 2^{3/4} = \sqrt[4]{2^3}$

Exercice 9.16: Simplifier les expressions suivantes:

a) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}$ $= 2^{3/4} = \sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}$ $= 3^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}} = 3^{11/12} = \sqrt[12]{3^{11}}$

c) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[6]{5}$ $= 5^{2/3}\cdot 5^{1/6} = 5^{5/6} = \sqrt[6]{5^5}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$ $= 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 3^{1/6} = \sqrt[6]{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2^2}}$ $= 2^{\frac{1}{2}-\frac{2}{4}} = 1$

f) $\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}$ $= \sqrt{2\cdot 2^{3/4}} = \sqrt{2^{7/4}}$ $= 2^{7/8} = \sqrt[8]{2^7}$

$2^{3/2}$

Exercice 9.17:

- Dans votre formulaire, vous trouvez ces *nouvelles* formules:

  a) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$ b) $\sqrt[m\cdot n]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^p}$

  À vous de les justifier…

- À l'aide de ces formules, simplifier les expressions suivantes:

  c) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[6]{2^9}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt{36^3}}$

Exercice 9.18: Les racines… Ce n'est pas si compliqué ;-)
À l'aide d'une calculatrice, estimer le nombre suivant:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}}}$$

$x^2 = 2 + x$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x-2)(x+1) = 0$
$x = 2$

Exercice 9.19: Les racines… un peu plus délicat
À l'aide d'une calculatrice, estimer le nombre suivant:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+8\sqrt{1+\ldots}}}}}}}} \rightsquigarrow 3$$

$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\ldots (n\sqrt{1+n}}}}}$

$x^2 = 1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\ldots}}}$

$\dfrac{y^2-1}{2}$ $\rightsquigarrow \sqrt{1+6}$ 2,86

$$\frac{\left(\dfrac{\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right)^2-1}{3}\right)^2-1}{4}$$