

Thème 9: Puissances et racines

9.1 Les puissances entières

- Rappels :**
- La **puissance n -ème d'un nombre a** est le produit de n facteurs égaux à a (avec $a \in \mathbb{N}$).
 - a s'appelle **la base** et n **l'exposant** de la puissance.
 - On note:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Par convention: $a^0 = 1$ (pour tout $a \neq 0$)

Exemples : a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Propriétés : Soit a et b des nombres réels, m et n des entiers naturels non nuls.

(I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

• $5^3 \cdot 5^4 = 5^{\dots}$

(II) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

• $(4^2)^3 = 4^{\dots}$

(III) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

• $3^2 \cdot (-1)^2 = \dots^2$

(IV) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$

• $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \dots$

(V) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } m < n \end{cases}$

• $\frac{2^6}{2^4} = \dots$

• $\frac{3^5}{3^9} = \dots$

Modèle 1 : Justifier les réponses suivantes:

a) $7^3 \cdot 7^2 = 7^5$ car

b) $(7^2)^3 = 7^6$ car

c) $\frac{3^4}{3^7} = \frac{1}{3^3}$ car

Exercice 9.1: Calculer sans machine:

a) $(2^2)^3$

b) $2^{(2^3)}$

c) $(2^3)^2$

d) $2^3 - 3^2$

e) $3^2 + 3^4$

f) $10^3 + 10^2$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

i) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$

j) $(\sqrt{2})^4$

k) $(\sqrt{5})^6$

l) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8$

Exercice 9.2: Calculer sans machine:

a) $\frac{2^6}{2^2}$

b) $\frac{-2^6}{2^3}$

c) $\frac{(-2)^6}{2^3}$

d) $\frac{2^{10}}{2^{12}}$

e) $\frac{2^4}{-2^5}$

f) $\frac{2^4}{(-2)^5}$

g) $\left(\frac{2}{2^3}\right)^2$

h) $\left(-\frac{2^7}{2^6}\right)^3$

i) $\left(\frac{2^0}{2^2}\right)^2$

j) $\frac{2^{16}}{4^7}$

k) $\frac{9^5}{3^{10}}$

l) $\left(\frac{5^3}{25^2}\right)^2$

Question : $2^3 = 8$. Mais que pourrait valoir 2^{-3} ?

Définition : Tout en gardant les propriétés précédentes valides, nous allons définir les puissances à exposant négatif par:

$$(VI) \quad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Modèle 2 : a) $3^{-4} =$

b) $(-2)^{-3} =$

Nouvelles propriétés : À la liste des propriétés précédentes, nous pouvons compléter

$$\begin{array}{ll}
 \text{(V')} & \boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \qquad \bullet \frac{3^2}{3^9} = \dots\dots \\
 \text{(VII)} & \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (a, b \neq 0)} \qquad \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2
 \end{array}$$

Modèle 3 : Justifier la réponse suivante:

$$\text{a) } \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \text{ car}$$

Exercice 9.3: Calculer sans machine:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } 2^{-1} \cdot 2^{-2} & \text{b) } 3^{-4} \cdot 3^4 & \text{c) } 4^0 \cdot 4^{-5} \cdot 4^3 \\
 \text{d) } a^{-3} \cdot a^4 & \text{e) } \frac{2^{-3}}{3^2} & \text{f) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\
 \text{g) } \frac{2^3}{3^{-2}} & \text{h) } \left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} & \text{i) } \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}
 \end{array}$$

Modèle 4 : Compléter les écritures suivantes:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } 2^{-3} \cdot 2^4 = \frac{1}{2^{\dots}} \text{ car} \\
 \text{b) } \left(2^{-3}\right)^4 = 4^{\dots} \text{ car} \\
 \text{c) } \frac{2^5}{4^{-3}} = 2^{\dots} \text{ car} \\
 \text{d) } \frac{9^{-2}}{36^{-2}} = \dots^{\dots} \text{ car} \\
 \text{e) } 2^{-3} \cdot 5^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\dots} \text{ car}
 \end{array}$$

Exercice 9.4: En détaillant le calcul si nécessaire, compléter les écritures suivantes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \ 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-5} = 2^{\dots} & \text{b)} \ (3^4)^2 = \frac{1}{3^{\dots}} & \text{c)} \ \frac{3^8}{3^2} = 9^{\dots} \\
 \text{d)} \ \frac{3^2}{3^6} = 9^{\dots} & \text{e)} \ \frac{5}{25^2} = 5^{\dots} & \text{f)} \ 2^3 \cdot 2^9 = 4^{\dots} \\
 \text{g)} \ 36^2 \cdot 6^{-2} = \frac{1}{6^{\dots}} & \text{h)} \ \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} = \dots^3 & \text{i)} \ \left(\frac{1}{25}\right)^{-3} = 5^{\dots} \\
 \text{j)} \ \left(\frac{2^3}{2^5}\right)^{-3} = 2^{\dots} & \text{k)} \ \left(\frac{2^{-1}}{2^3}\right)^2 = 2^{\dots} & \text{l)} \ \left(\frac{3^{-4}}{9^2}\right)^2 = 9^{\dots}
 \end{array}$$

9.2 Les racines

Exercice 9.5: Vérifier avec la calculatrice les égalités suivantes:

$$\text{a)} \ \sqrt{4 + \sqrt{12}} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\text{b)} \ \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

Comment pourrait-on les justifier *sans calculatrice* ?

Définition : Soit a un nombre réel positif et n un entier naturel supérieur à 1, on appelle **racine n -ième de a** , noté $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre positif r tel que $r^n = a$. En d'autres termes:

$$r = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow r^n = a \text{ et } r \geq 0$$

- Dans le cas où $n = 2$, la racine 2-ième s'appelle **racine carrée** et se note $\sqrt{}$ au lieu de $\sqrt[2]{}$.
- Dans le cas où $n = 3$, la racine 3-ième s'appelle **racine cubique**.

Modèle 5 : a) $\sqrt[3]{125} = \dots$ car

b) $\sqrt[4]{81} = \dots$ car

Exercice 9.6: En justifiant dans quelques cas, calculer sans machine:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \ \sqrt{0} & \text{b)} \ \sqrt{0,04} & \text{c)} \ \sqrt{0,0009} \\
 \text{d)} \ \sqrt[3]{1000} & \text{e)} \ \sqrt[5]{32} & \text{f)} \ \sqrt[4]{16} \\
 \text{g)} \ \sqrt[3]{0,027} & \text{h)} \ \sqrt[4]{0,0001} & \text{i)} \ \sqrt[3]{0,125} \\
 \text{j)} \ \sqrt{0,0001} & \text{k)} \ \sqrt[3]{0,000008} &
 \end{array}$$

Question : Que pourrait valoir $\sqrt[3]{-125}$?

Ou plus généralement, qu'en est-il de $\sqrt[n]{a}$ si a est négatif ? Il s'agit alors d'étendre la définition pour des valeurs de $a < 0$:

Définition : • Si $a < 0$ et n est un **entier impair**, on définit la racine n -ième par:

$$r = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow r^n = a$$

•

• Si $a < 0$ et n est un **entier pair**, la racine n -ième de a **n'est pas définie**.

Modèle 6 : a) $\sqrt[3]{-8} = \dots\dots\dots$ car $\dots\dots\dots$

b) $\sqrt[4]{-16} = \dots\dots\dots$

Exercice 9.7: En justifiant dans quelques cas, calculer sans machine:

a) $\sqrt[3]{-27}$

b) $\sqrt[5]{-1}$

c) $\sqrt[2]{-4}$

d) $\sqrt[3]{(-2)^3}$

e) $\sqrt{(-2)^2}$

f) $\sqrt[3]{-0,125}$

g) $\sqrt[3]{-0,027}$

h) $(\sqrt[4]{-1})^2$

i) $\sqrt{(-2)^4}$

Propriétés : Soit a et b des nombres **réels positifs**, n un entier naturel non nul.

(VIII) $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = a}$

• $(\sqrt[3]{2})^3 =$

(IX) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$

• $\sqrt[3]{5^3} =$

(X) $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$

• $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} =$

(XI) $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)}$

• $\sqrt[3]{\frac{25}{8}} =$

Mise en garde : Contrairement au cas de la multiplication, on ne peut pas "casser" la racine d'une somme en somme de racines. Réciproquement, on ne peut pas directement regrouper une somme de racines:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Modèle 7 : Sans calculatrice, calculer:

a) $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} =$

b) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} =$

Exercice 9.8: Calculer sans machine:

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{2^2}$

c) $\sqrt{9+1}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32}$

e) $\sqrt{2^6}$

f) $\sqrt{9} + \sqrt{3}$

g) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$

h) $\left(\sqrt[4]{0,0001}\right)^4$

i) $\sqrt[5]{2^{10}}$

Modèle 8 : Sachant que $\sqrt{5} \approx 2,24$ et $\sqrt{50} \approx 7,07$, calculer

a) $\sqrt{500} =$

b) $\sqrt{0,005} =$

Exercice 9.9: Sachant que $\sqrt{27} \approx 5,19$ et $\sqrt{270} \approx 16,43$, calculer:

a) $\sqrt{2700}$

b) $\sqrt{27'000}$

c) $\sqrt{270'000}$

d) $\sqrt{0,27}$

e) $\sqrt{0,027}$

f) $\sqrt{0,000027}$

Exercice 9.10: Sachant que $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{270} \approx 6,46$ et $\sqrt[3]{2700} \approx 13,92$, calculer:

a) $\sqrt[3]{27'000}$

b) $\sqrt[3]{270'000}$

c) $\sqrt[3]{2'700'000}$

d) $\sqrt[3]{0,27}$

e) $\sqrt[3]{0,027}$

f) $\sqrt[3]{0,00027}$

Modèle 9 : Sachant que $\sqrt{2} \approx 1,41$, estimer sans calculatrice les nombres suivants:

a) $\sqrt{8} =$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

c) $\sqrt{\frac{9}{2}} =$

Exercice 9.11: Sachant que $\sqrt{3} \approx 1,73$, estimer sans calculatrice les nombres suivants:

a) $\sqrt{300}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{\frac{4}{3}}$

Les 3 réflexes : a) L'expression sous une racine doit être "la plus petite" possible:

• $\sqrt{72} =$

• $\sqrt{49+1} =$

b) On ne laisse pas de racine au dénominateur d'une fraction:

• $\frac{3}{\sqrt{5}} =$

• $\frac{2}{5\sqrt{5}} =$

c) On ne laisse pas de racine de fractions:

• $\sqrt{\frac{8}{3}} =$

• $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} =$

Exercice 9.12: En respectant les 3 réflexes précédents, simplifier:

a) $\sqrt{300}$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{\frac{4}{3}}$

d) $\sqrt{2^7}$

e) $2\sqrt{1000}$

f) $\sqrt{\frac{39}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$

g) $\sqrt{12} + \sqrt{27}$

h) $\frac{4+\sqrt{8}}{2}$

i) $\frac{9}{2\sqrt{3}}$

j) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

k) $\sqrt{162}$

l) $\frac{2}{\sqrt{8}}$

9.3 Les puissances à exposants rationnels

Exercice 9.13: À l'aide de la calculatrice, calculer:

a) $25^{\frac{1}{2}}$

b) $27^{\frac{1}{3}}$

c) $27^{\frac{2}{3}}$

Que constatez-vous ?

Définition : Tout en gardant les propriétés précédentes valides, nous allons définir les puissances à exposant rationnel par:

1) Si n est **pair** et a un réel **positif**:

$$(XII) \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

2) Si n est **impair** et a un réel **quelconque**:

$$(XII') \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

En effet, dans ce deuxième cas, la racine peut-être calculée même si a est négatif. Par exemple:

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Modèle 10 : Écrire à l'aide d'une racine et simplifier:

a) $4^{\frac{1}{2}} =$

b) $5^{-0,5} =$

Exercice 9.14: Écrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier:

a) $5^{1/2}$

b) $4^{3/2}$

c) $16^{1/4}$

d) $32^{1/10}$

e) $9^{3/2}$

f) $25^{0,5}$

g) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

h) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

i) $2^{-1/2}$

j) $9^{-1,5}$

k) $5^{6/5}$

l) $\frac{2}{8^{1/2}}$

Exercice 9.15: Écrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels:

a) $\sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt[11]{5^6}$

c) $\sqrt[9]{3^3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

f) $\sqrt[3]{3^9}$

Modèle 11 : Simplifier les expressions suivantes:

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2^3} =$

b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} =$

c) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} =$

Exercice 9.16: Simplifier les expressions suivantes:

a) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[6]{5}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2^2}}$

f) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} =$

Exercice 9.17: • Dans votre formulaire, vous trouvez ces *nouvelles* formules:

a) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{m \cdot p}}} = \sqrt[n]{a^p}$

À vous de les justifier...

• À l'aide de ces formules, simplifier les expressions suivantes:

c) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$

d) $\sqrt[6]{2^9}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{36^3}}$

Exercice 9.18: Les racines... Ce n'est pas si compliqué ;-)

À l'aide d'une calculatrice, estimer le nombre suivant:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}}}$$

Exercice 9.19: Les racines... un peu plus délicat

À l'aide d'une calculatrice, estimer le nombre suivant:

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5\sqrt{1 + 6\sqrt{1 + 7\sqrt{1 + 8\sqrt{1 + \dots}}}}}}}}}$$

Quelques réponses : Thème 9

Exercice 9.1: a) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^6 = 64$

c) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

e) $3^2 + 3^6 = 9 + 81 = 90$

g) $\frac{1^4}{3} = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$

i) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{-3}{2}\right)^4 = \frac{(-3)^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

k) $(\sqrt{5})^6 = \dots = 5^3 = 125$

b) $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$

d) $2^3 - 3^2 = 8 - 9 = -1$

f) $10^3 + 10^2 = 1000 + 100 = 1100$

h) $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = \frac{-8}{125}$

j) $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

l) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^8 = \dots = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

b) $\frac{-2^6}{2^3} = -\frac{2^6}{2^3} = -2^{6-3} = -2^3 = -8$

d) $\frac{2^{10}}{2^{12}} = \frac{1}{2^{12-10}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

f) $\frac{2^4}{(-2)^5} = -\frac{2^4}{2^5} = -\frac{1}{2^{5-4}} = -\frac{1}{2}$

h) $\left(-\frac{2^7}{2^6}\right)^3 = \left(-2^{7-6}\right)^3 = (-2)^3 = -8$

j) $\frac{2^{16}}{4^7} = \frac{2^{16}}{(2^2)^7} = \frac{2^{16}}{2^{14}} = 2^{16-14} = 2^2 = 4$

j) $\left(\frac{5^3}{25^2}\right)^2 = \left(\frac{5^3}{5^4}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

b) $3^{-4} \cdot 3^4 = 3^{-4+4} = 3^0 = 1$

d) $a^{-3} \cdot a^4 = a^{-3+4} = a^1 = a$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{(1/2)^2} = \frac{1}{1/4} = 1 \cdot 4 = 4$

h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{-2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{-2}\right)^2 = \frac{5^2}{(-2)^2} = \frac{25}{4}$

i) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Exercice 9.4: a) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{3+4+5} = 2^{12}$

b) $(3^4)^2 = 3^8 = \frac{1}{3^{-8}}$

c) $\frac{3^8}{3^2} = 3^6 = (3^2)^3 = 9^3$

d) $\frac{3^2}{3^6} = 3^{-4} = (3^2)^{-2} = 9^{-2}$

e) $\frac{5}{25^2} = \frac{5}{5^4} = 5^{-3}$

f) $2^3 \cdot 2^9 = 2^{12} = (2^2)^6 = 4^6$

g) $36^2 \cdot 6^{-2} = 6^4 \cdot 6^{-2} = 6^2 = \frac{1}{6^{-2}}$

h) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{-1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{-1}\right)^3 = (-5)^3$ ou -5^3

i) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-3} = \left(\frac{25}{1}\right)^3 = (5^2)^3 = 5^6$

j) $\left(\frac{2^3}{2^5}\right)^{-3} = \left(\frac{2^5}{2^3}\right)^3 = (2^2)^3 = 2^6$

k) $\left(\frac{2^{-1}}{2^3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^4}\right)^2 = (2^{-4})^2 = 2^{-8}$

l) $\left(\frac{3^{-4}}{9^2}\right)^2 = \frac{3^{-8}}{9^4} = \frac{3^{-8}}{9^4} = \frac{3^{-8}}{9^4} = 9^{-8}$

Exercice 9.5: Dans les 2 cas, il suffit de montrer que les valeurs des 2 côtés du "—" sont bien identiques.

Exercice 9.6: a) $\sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$

b) $\sqrt{0,04} = 0,2$ car $0,2^2 = 0,04$

c) $\sqrt[3]{0,0009} = 0,03$ car $0,03^3 = \dots$

d) $\sqrt[3]{1000} = 10$ car $10^3 = 1000$

e) $\sqrt[4]{32} = 2$ car $2^5 = 32$

f) $\sqrt[4]{16} = 2$ car $2^4 = 16$

g) $\sqrt[4]{0,027} = 0,3$ car $0,3^3 = \dots$

h) $\sqrt[4]{0,0001} = 0,1$ car $0,1^4 = 0,0001$

i) $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$ car $0,5^3 = \dots$

j) $\sqrt{0,0001} = 0,01$ car $0,01^2 = 0,0001$

k) $\sqrt[3]{0,000008} = 0,02$ car $0,02^3 = 0,000008$

Exercice 9.7: a) $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$

b) $\sqrt[3]{-1} = -1$ car $(-1)^3 = -1$

c) $\sqrt[3]{-4}$ est non définie

d) $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

e) $\sqrt{(-2)^2} = 2$ car $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4}$

f) $\sqrt[3]{-0,125} = -0,5$ car $(-0,5)^3 = -0,125$

g) $\sqrt[3]{-0,027} = -0,3$ car ...

h) $(\sqrt[4]{-1})^2$ est non définie

i) $\sqrt{(-2)^4} = 4$

Exercice 9.3: a) $2^1 \cdot 2^2 = 2^{1+2} = 2^3 = \frac{1}{8}$

c) $4^0 \cdot 4^{-5} \cdot 4^3 = 4^2 = \frac{1}{16}$

e) $\frac{2^{-3}}{3^2} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{1}{8 \cdot 9} = \frac{1}{72}$

g) $\frac{2^3}{3^{-2}} = \frac{8}{3} = 8 \cdot 3 = 72$

i) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Exercice 9.8: a) $\sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

e) $\sqrt[2]{6} = \sqrt[2]{64} = 8$

g) $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{-27}{1000}} = \frac{-3}{10}$

i) $\sqrt[5]{2^{10}} = \sqrt[5]{(2^2)^5} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt{2^2} = 2$

d) $\sqrt[4]{8 \cdot \sqrt[4]{32}} = \sqrt[4]{256} = 4$

f) $\sqrt{9} + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$

h) $(\sqrt[4]{0,0001})^4 = 0,0001$

Exercice 9.9: a) $\sqrt{2700} = \sqrt{100 \cdot \sqrt{27}} \approx 10 \cdot \sqrt{27} \approx 51,9$

b) $\sqrt{27'000} = \sqrt{100 \cdot \sqrt{270}} \approx 10 \cdot \sqrt{270} \approx 164,3$

c) $\sqrt{270'000} = \sqrt{10'000 \cdot \sqrt{27}} \approx 100 \cdot \sqrt{27} \approx 519$

d) $\sqrt{0,27} = \sqrt{\frac{27}{100}} = \frac{\sqrt{27}}{10} \approx 0,519$

e) $\sqrt{0,027} = \sqrt{\frac{270}{10'000}} = \frac{\sqrt{270}}{100} = 0,1643$

f) $\sqrt{0,000027} = \sqrt{\frac{27}{1'000'000}} = \frac{\sqrt{27}}{1'000} \approx 0,00519$

Exercice 9.10: a) $\sqrt[3]{27'000} = \sqrt[3]{1'000 \cdot \sqrt[3]{27}} = 10 \cdot 3 = 30$

b) $\sqrt[3]{270'000} = \sqrt[3]{1'000 \cdot \sqrt[3]{270}} \approx 10 \cdot \sqrt[3]{270} \approx 64,6$

c) $\sqrt[3]{2'700'000} = \sqrt[3]{1'000 \cdot \sqrt[3]{2'700}} \approx 10 \cdot \sqrt[3]{2'700} \approx 139,2$

d) $\sqrt[3]{0,27} = \sqrt[3]{\frac{270}{1'000}} = \frac{\sqrt[3]{270}}{10} \approx 0,646$

e) $\sqrt[3]{0,027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1'000}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{10} = \frac{3}{10} = 0,3$

f) $\sqrt[3]{0,00027} = \sqrt[3]{\frac{270}{1'000'000}} = \frac{\sqrt[3]{270}}{1'000} = \frac{6,46}{100} = 0,0646$

Exercice 9.11: a) $\sqrt{300} \approx 17,3$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}} \approx 1,73$

c) $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{3,46}{3} \approx 1,15$

Exercice 9.12: a) $10\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $2^3 \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

e) $20\sqrt{10}$ f) $\frac{\sqrt{26}}{2}$ g) $5\sqrt{3}$ h) $2 + \sqrt{2}$

i) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ j) $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$ k) $9\sqrt{2}$ l) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 9.13: a) 5 b) 3 c) 9

Exercice 9.14: a) $5^{1/2} = \sqrt{5}$ b) $4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = 8$

c) $16^{1/4} = (2^4)^{1/4} = 2$ d) $32^{1/10} = (32^{1/5})^{1/2} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

e) $9^{3/2} = (9^{1/2})^3 = 3^3 = 27$

g) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 9^{1/2} = 3$ h) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

i) $2^{-1/2} = \frac{1}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ j) $9^{-1,5} = \frac{1}{9^{3/2}} = \frac{1}{(9^{1/2})^3} = \frac{1}{27}$

k) $5^{6/5} = (5^6)^{1/5} = \sqrt[5]{5^6} = 5\sqrt[5]{5}$ l) $\frac{2}{8^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 9.15: a) $3^{1/5}$ b) $5^{6/11}$ c) $3^{3/9} = 3^{1/3}$

d) $2^{1/2}$ e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}$ f) $3^{9/3} = 3^3$

Exercice 9.16: a) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} = 2^{1/4} \cdot 2^{1/2} = 2^{1/4+1/2} = 2^{3/4} = \sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3^{1/4} \cdot 3^{2/3} = 3^{1/4+2/3} = 3^{11/12} = \sqrt[12]{3^{11}}$

c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[6]{5} = 5^{2/3} \cdot 5^{1/6} = 5^{2/3+1/6} = 5^{5/6} = \sqrt[6]{5^5}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3^{1/2}}{3^{1/3}} = 3^{1/2-1/3} = 3^{1/6} = \sqrt[6]{3}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2^{1/2}}{2^{1/4}} = 2^{1/2-1/4} = 2^{1/4}$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} = (2 \cdot 2 \cdot 2)^{1/2 \cdot 1/4 \cdot 1/2} = 2^{1/2+1/4+1/8} = 2^{7/8} = \sqrt[8]{2^7}$

Exercice 9.17: Il s'agit de proposer une chaîne d'égalités passant du terme de gauche à celui de droite. Mais... Ne regardez pas trop vite ci-dessous...

- a) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^{1/n}} = \left(a^{1/n}\right)^{1/n} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n^2}} = a^{\frac{1}{m^2}} = \sqrt[m]{a}$
- b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \left(a^{mp}\right)^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{mp}{mn}} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^p\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$
- c) $\sqrt[n]{2}$ d) $\sqrt[3]{2^3} = 2\sqrt{2}$ e) 6

Exercice 9.18: Vous avez dû obtenir un nombre proche de 2. Voici pourquoi il s'agit même exactement de 2.

1) Partons de $2 = \sqrt{4}$ que l'on peut écrire: $2 = \sqrt{2+2}$

2) Substituons le dernier 2 grâce à cette même dernière égalité. On obtient:

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2+2}}$$

3) Répétons ce même procédé:

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2+2}}}$$

4) Et encore une fois:

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2+2}}}}$$

5) Et ainsi de suite:

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

Je vous laisse trouver l'imbrication de racines qui donne 3 à la place de 2.

Exercice 9.19: Exercice BONUS.