Les probabilités sont des grandeurs servant à évaluer les chances qu'un phénomène se produise.

1 Calculs de probabilités par dénombrement

Exemple d'introduction

On lance un dé équilibré.

Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?

1 chance sur 6 $\Rightarrow \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \cong 16{,}67\,\%$

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

2, 4 ou 6 $\Rightarrow$ 3 chances sur 6 $\Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

On observe que spontanément, on a utilisé la formule suivante :

$$\text{Probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On remarque aussi qu'une probabilité peut se donner de trois manières différentes :

— fraction (qu'on réduira si nécessaire)

— code à virgule

— pourcentage (souvent arrondi à 2 décimales)

Définitions

Expérience aléatoire

Une expérience est aléatoire si

— le résultat ne peut pas être prédit avec certitude

— on sait à l'avance quels sont les résultats possibles

Chaque résultat d'une expérience aléatoire est aussi appelé réalisation ou issue.

Univers

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles. On le note U.

Evénement

Un événement est un sous-ensemble de U. C'est donc un ensemble d'issues possibles, mais pas forcément de toutes les issues possibles.

Exemple

Expérience aléatoire : lancer d'un dé équilibré.

$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Evénements possibles : A ="obtenir 6" $= \{6\}$

B ="obtenir un nombre pair" $= \{2; 4; 6\}$

C ="obtenir un nombre plus grand que 4" $= \{5; 6\}$

D ="obtenir un nombre positif" $= \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = U$

E ="obtenir un nombre négatif" $= \{\,\} = \emptyset$

etc...

Issues équiprobables

Les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables si elles ont la même chance (ou probabilité) de se produire.

Exemples

— Lancer d'un dé équilibré : $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ toutes ces issues sont équiprobables

— Lancer d'une pièce de monnaie équilibrée : $U = \{\text{Pile}\,;\,\text{Face}\}$ équiprobables

— Note au prochain test de maths : $U = \{1; 1{,}5; 2; \dots; 5{,}5; 6\}$ PAS équiprobables !

Calcul de probabilités lorsque toutes les issues sont équiprobables

Si toutes les issues sont équiprobables (donc tous les éléments de l'univers ont la même probabilité de se produire), on peut calculer la probabilité d'un événement E avec la formule suivante :

$$P(E) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments dans } E}{\text{nombre d'éléments dans } U} = \frac{|E|}{|U|}$$

Pour dénombrer les cas favorables et les cas possibles lors d'expériences aléatoires plus complexes, on utilise les outils d'analyse combinatoire.

Exemple 1

On lance 3 fois un dé équilibré et on écrit le résultat sous la forme d'un nombre à 3 chiffres.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : " obtenir un nombre inférieur à 200 "
B : " obtenir un multiple de 2 "

Cas possibles : $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Cas fav. pour A : $1 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow P(A) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} \cong 16{,}67\,\%$

Cas fav. pour B : $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108 \Rightarrow P(B) = \frac{108}{216} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\,\%$

Exemple 2

On tire 2 cartes d'un jeu de 52 cartes.
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 coeurs ?

Cas possibles : $C_2^{52} = 1326$

Cas fav : $C_2^{13} = 78 \Rightarrow P(2\text{ coeurs}) = \frac{78}{1326} \cong 5{,}88\,\%$

Quelle est la probabilité d'obtenir 2 rois ?

Cas fav : $C_2^4 = 6$ Cas poss : inchangé $\Rightarrow 1326$

$\Rightarrow P(2 \text{ rois}) = \frac{6}{1326} \cong 0{,}45\,\%$

Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de pique et le 10 de trèfle ?

Cas fav : 1 $(C_1^1 \cdot C_1^1 = 1)$

$\Rightarrow P(\text{as de pique et 10 de trèfle}) = \frac{1}{1326} \cong 0{,}08\,\%$

Exemple 3

On tire 5 cartes d'un jeu de 36 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : " tirer les 4 as"
B : " tirer 5 cartes de la même couleur (= famille) "
C : " tirer au moins un as "

Cas poss : $C_5^{36} = 376'992$

$|A| = C_4^4 \cdot C_1^{32} = 32 \Rightarrow P(A) = \frac{32}{376'992} \cong 0{,}008\,\%$

$|B| = C_1^4 \cdot C_5^9 = 504 \Rightarrow P(B) = \frac{504}{376'992} \cong 0{,}13\,\%$

$|C| = \underbrace{376'992}_{\text{tout}} - \underbrace{C_5^{32}}_{\text{sauf aucun as}} = 175'616 \Rightarrow P(C) = \frac{175'616}{376'992} \cong 46{,}58\,\%$

On peut aussi faire $P(C) = 100\% - P(\text{aucun as}) = 100\% - \frac{C_5^{32}}{C_5^{36}} \cong 100\% - 53{,}42\%$
$= 46{,}58\,\%$

Propriétés des probabilités

N'importe quel événement E vérifie les deux propriétés suivantes :

1) $0 \leq P(E) \leq 1$ La proba se trouve toujours entre 0 et 1, donc entre 0% et 100%

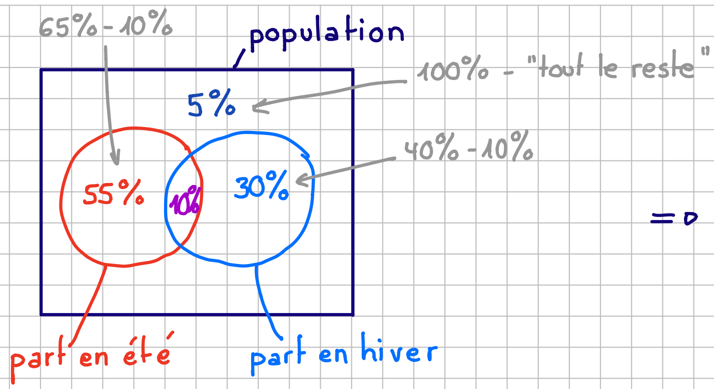
2) $P(\bar{E}) = P(\text{"E ne se réalise pas"}) = 1 - P(E) = 100\% - P(E)$ complémentaire

2 Représentation à l'aide d'un diagramme de Venn

Exemple 1

Un sondage a révélé que 65% de la population d'un pays part en vacances en été, et 40% part en vacances en hiver. On sait également que 10% de cette population part en vacances en été et en hiver.

Déterminer le pourcentage de la population qui ne part en vacances ni en été, ni en hiver.



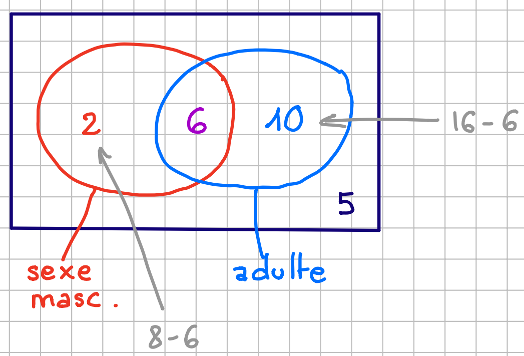
$\Rightarrow$ 5% de la population ne part ni en été, ni en hiver

Exemple 2

Dans un immeuble, il y a 23 habitants. Parmi eux, il y a 6 hommes adultes, $\underbrace{7 \text{ enfants}}_{\Rightarrow\ 23-7\ =\ 16 \text{ adultes}}$, et 15 personnes de sexe féminin. $\Rightarrow$ 23 - 15 = 8 masc.

— Quelqu'un entre dans la maison. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une petite fille ?

— On s'aperçoit que cette personne est un enfant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une petite fille ?



$P(\text{petite fille}) = \dfrac{5}{23} \approxeq 21{,}74\%$

$P(\text{petite fille, sachant que c'est un enfant})$

$= \dfrac{5}{5+2} \approxeq 71{,}43\%$

⚠ Ne pas faire une patate "adulte" et une patate "enfant", car "enfant" est le complémentaire de "adulte"

Exemple 3

350 personnes participent à une conférence. Au moment de leur inscription, on leur a demandé les langues qu'ils étaient capables de comprendre.

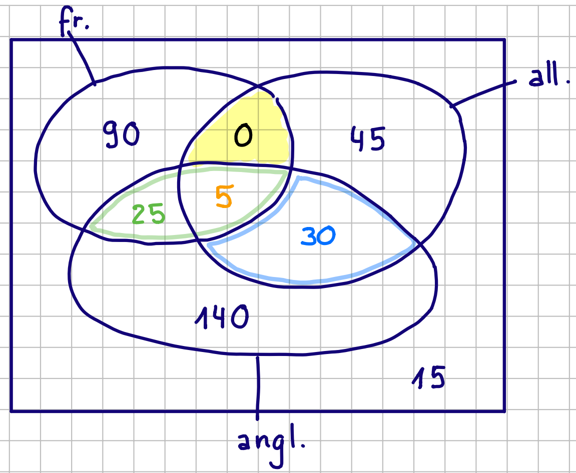
On sait que 120 personnes comprennent au moins le français, 200 personnes comprennent au moins l'anglais et 80 personnes comprennent au moins l'allemand. On sait de plus que 30 personnes comprennent au moins le français et l'anglais, et que 30 personnes comprennent seulement l'anglais et l'allemand. 5 personnes comprennent les 3 langues, et tous ceux qui comprennent le français et l'allemand comprennent également l'anglais.

a) Représenter cette situation sous forme d'un diagramme de Venn

b) Combien de personnes ne comprennent aucune des trois langues ?

c) Quel pourcentage des participants à la conférence comprend exactement 2 des trois langues ?

d) Parmi les personnes comprenant l'anglais, quel pourcentage comprend les 3 langues ?



b) 15 personnes

c) $\frac{25 + 30 + 0}{350} \cong 15,71\,\%$

d) $\frac{5}{200} = 2,5\,\%$

3 Probabilité conditionnelle

Définition de la probabilité conditionnelle

La probabilité d'un événement peut changer si l'on dispose d'une information sur le résultat obtenu.

Exemples

— On lance un dé équilibré.

Probabilité d'obtenir un 6 ? $\frac{1}{6}$

Probabilité d'obtenir un 6 si l'on sait que le résultat est pair ? $\frac{1}{3}$

— On s'intéresse à la température maximale d'une journée à la Tour-de-Peilz. La probabilité qu'il fasse au moins 20 degrés est-elle modifiée si l'on sait qu'on est en hiver ?

Oui ! (Même si on ne sait pas la calculer, on sait qu'elle va changer)

Probabilité conditionnelle (probabilité de A sachant B)

La probabilité que l'événement A se réalise, **sachant que** l'événement B est réalisé s'appelle la probabilité conditionnelle de A sachant B, et se note $P(A|B)$.

Calcul d'une probabilité conditionnelle lorsque les issues sont équiprobables

Si toutes les issues sont équiprobables, on peut calculer les probabilités en dénombrant les cas favorables et les cas possibles. On va faire de même pour une probabilité conditionnelle, en utilisant la formule suivante :

inter

$$P(A|B) = \frac{\text{nombre de cas vérifiant } A \text{ et } B}{\text{nombre de cas vérifiant } B} = \frac{|A \cap B|}{|B|} \quad \left(= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right)$$

Remarque

Au dénominateur, on n'a plus le nombre d'éléments dans l'univers complet, mais le nombre d'éléments de B. On parle alors d'univers restreint.

Il faut imaginer qu'on élimine toutes les issues qui deviennent impossibles maintenant qu'on sait que B est réalisé. Il ne reste donc plus que les issues dans B. C'est notre nouvel univers, et on choisira les cas favorables parmi ceux-ci seulement.

$\Rightarrow$ en haut, on a bien $|A \cap B|$, et non $|A|$

Exemple

On jette deux dés l'un après l'autre. On considère les événements suivants :

A : " la somme des deux résultats vaut 8 "
B : " on obtient 2 résultats différents "
C : " le premier résultat est un nombre impair "

Calculer $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$, $P(B|A)$, $P(A|C)$ et $P(A|\bar{C})$.

$$|U| = 6 \cdot 6 = 36$$

$$A = \{2\text{-}6\,;\ 6\text{-}2\,;\ 3\text{-}5\,;\ 5\text{-}3\,;\ 4\text{-}4\} \Rightarrow |A| = 5$$

$$|B| = 6 \cdot 5 = 30$$

$$|C| = 3 \cdot 6 = 18$$

$$P(A) = \frac{5}{36} \cong 13{,}89\%$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{4}{30} \cong 13{,}33\%$$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{|A \cap \bar{B}|}{|\bar{B}|} = \frac{1}{6} \cong 16{,}67\%$$

4-4

36 - 30 ou 6 · 1

$$P(B|A) = \frac{|B \cap A|}{|A|} = \frac{4}{5} = 80\%$$

$$P(A|C) = \frac{|A \cap C|}{|C|} = \frac{2}{18} \cong 11{,}11\%$$

$$P(A|\bar{C}) = \frac{|A \cap \bar{C}|}{|\bar{C}|} = \frac{3}{18} \cong 16{,}67\%$$

36 - 18

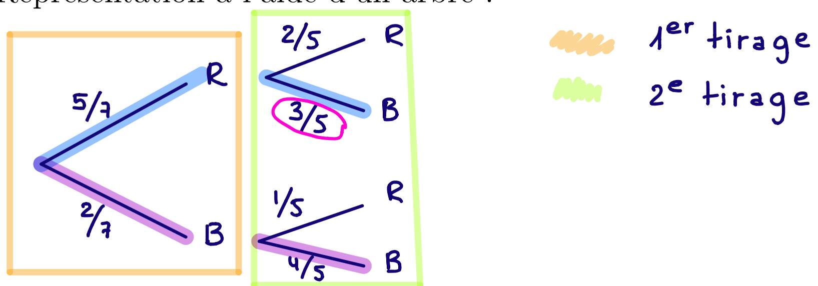
4 Représentation à l'aide d'un arbre

Lorsque les issues ne sont pas équiprobables, on ne peut plus utiliser les outils de combinatoire pour calculer des probabilités. On va alors représenter la situation à l'aide d'un arbre.

Exemple 1

Une première urne contient 5 billes rouges et 2 billes bleues. Une deuxième urne contient 1 bille rouge et 3 billes bleues. On tire une bille de la première urne, et on la place dans la deuxième urne. On tire ensuite une bille de la deuxième urne.

Représentation à l'aide d'un arbre :



Quelle est la probabilité que la première bille soit rouge et la deuxième bleue ?

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{7} \cong 42,86\,\%$$

Quelle est la probabilité que la deuxième bille soit bleue ?

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{23}{35} \cong 65,71\,\%$$

Quelle est la probabilité que la deuxième bille soit bleue, sachant que la première bille était rouge ?

$$\frac{3}{5} = 60\,\%$$

Quelle est la probabilité que la première bille ait été rouge, sachant que la deuxième bille est bleue ?

$$P(1^e R \mid 2^e B) = \frac{P(1^e R \text{ et } 2^e B)}{P(2^e B)} = \frac{\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{15}{23} \cong 65,22\,\%$$

Règles de construction et d'utilisation d'un arbre

— L'arbre a autant "d'étages" qu'il y a d'expériences successives.

— Au bout de chaque branche, on note l'issue correspondant à cette expérience.

— Sur chaque branche, on note la probabilité d'obtenir cette issue, **sachant ce qui vient avant**.

— A chaque embranchement (ou sommet) de l'arbre, toutes les issues possibles **sachant ce qui vient avant** doivent être représentées par des nouvelles branches. La somme des probabilités des branches partant de chaque sommet doit donc toujours être égale à 1.

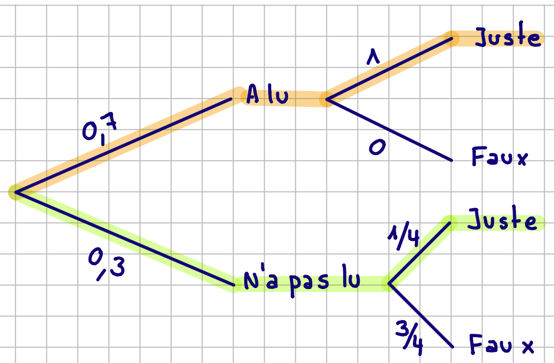
— Pour obtenir la probabilité de tous les événements successifs d'un chemin, on multiplie toutes les probabilités figurant sur ce chemin.

Exemple 2

Lors d'un contrôle de devoirs sur une lecture en français, les élèves doivent cocher la bonne réponse parmi 4 réponses différentes.

On estime que 70% des élèves ont lu leur livre, et cochent donc la bonne réponse à coup sûr. Les autres choisissent une réponse au hasard.

Si un élève a coché la bonne réponse, quelle est la probabilité qu'il ait lu le livre ?



$$P(\text{A lu} \mid \text{Juste}) = \frac{P(\text{A lu et Juste})}{P(\text{Juste})} = \frac{0{,}7 \cdot 1}{0{,}7 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 1/4} \cong 90{,}32\,\%$$

5 Espérance

Définitions

Variable aléatoire

Une variable aléatoire représente l'issue d'une expérience aléatoire, lorsque cette issue est un nombre.

Par exemple, le résultat d'un lancer de dé est une variable aléatoire, alors que le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie n'en est pas une.

Espérance d'une variable aléatoire

L'espérance d'une variable aléatoire est la valeur moyenne que l'on obtiendrait si l'on répétait un très grand nombre de fois (en fait une infinité de fois) la même expérience.

Calcul de l'espérance d'une variable aléatoire

Si X est une variable aléatoire pouvant prendre les n valeurs x_1, x_2, x_3, ..., x_n ,
(autrement dit, $U = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$)

alors l'espérance de X se calcule par la formule suivante :

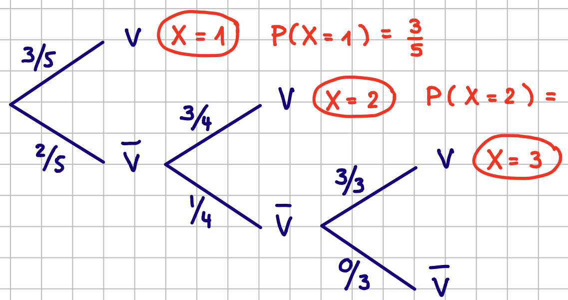
$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Remarque

On retrouve la formule vue en statistiques descriptives pour calculer la moyenne pondérée à partir des fréquences. L'espérance peut donc être vue comme une "moyenne théorique".

Exemple 1

Une urne contient trois boules vertes, une boule rouge et une boule bleue. On tire successivement et sans remise une boule, jusqu'à obtenir une boule verte.
Soit X le nombre de boules tirées. Calculer et interpréter l'espérance de X.



$P(X=1) = \frac{3}{5}$

$P(X=2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

$P(X=3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10}$

x	1	2	3	total
P(X=x)	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1 = 100%

$\Rightarrow E(X) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = 1{,}5$

Si on répète l'expérience un grand nombre de fois, on aura en moyenne tiré 1,5 boule.

Exemple 2

On vous propose le jeu suivant : vous payez 5 francs pour participer, puis vous lancez deux dés équilibrés. Si vous obtenez deux fois le même résultat, vous recevez 20 francs. Sinon, vous ne recevez rien.
Acceptez-vous de jouer à ce jeu ?

On pose X : gain net

$\Rightarrow$ soit on obtient 2 mêmes résultats, et on gagne $20 - 5 = 15$ frs net $\Rightarrow X = 15$

soit on obtient 2 résultats différents et on perd 5 frs $\Rightarrow X = -5$

$P(X=15) = P(\text{2 mêmes résultats}) = \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$

$P(X=-5) = \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 6} = \frac{5}{6}$ ou alors $P(X=-5) = 1 - P(X=15) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

x	15	-5	tot
P(X=x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

$\Rightarrow E(X) = 15 \cdot \frac{1}{6} + (-5) \cdot \frac{5}{6} = -\frac{5}{3} \cong -1{,}67$

En moyenne, on perd 1,67 frs à ce jeu. Il n'est pas équitable

Remarque

On dit qu'un jeu de hasard est équitable si l'espérance du gain net de chaque joueur vaut zéro.