Lecture de graphe 3C

Définition et dessin du graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des points du type $(x\ ;\ f(x))$. En général, ces points forment une courbe.

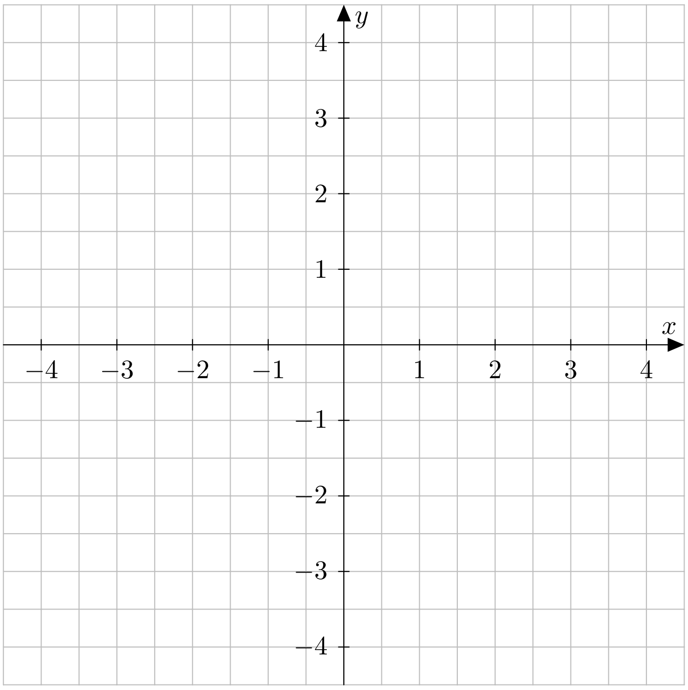
Exemple 1

$\boxed{f(x) = \frac{3}{2}x - 1}$

Calcul de points

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$(x; f(x))$							

Dessin du graphe



Caractéristiques d'une fonction affine

— Forme générale de la fonction :

....

— Le graphe est

....

— La pente vaut

....

— L'ordonnée à l'origine vaut

....

— Le zéro se calcule en résolvant

....

....

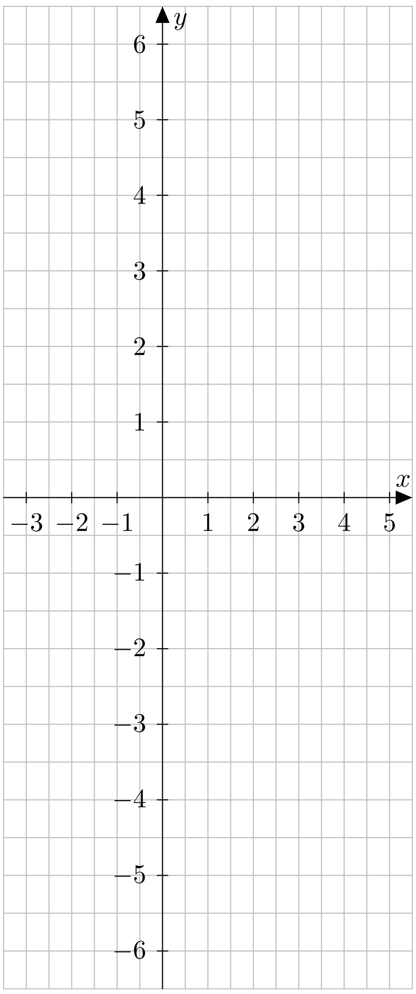
Exemple 2

$\boxed{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$

Calcul de points

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							
$(x; f(x))$							

Dessin du graphe



Caractéristiques d'une fonction quadratique

- Forme générale de la fonction :

  ....

- Le graphe est

  ....

  ....

  ....

- L'ordonnée à l'origine vaut

  ....

- Les zéros se calculent en résolvant

  ....

  ....

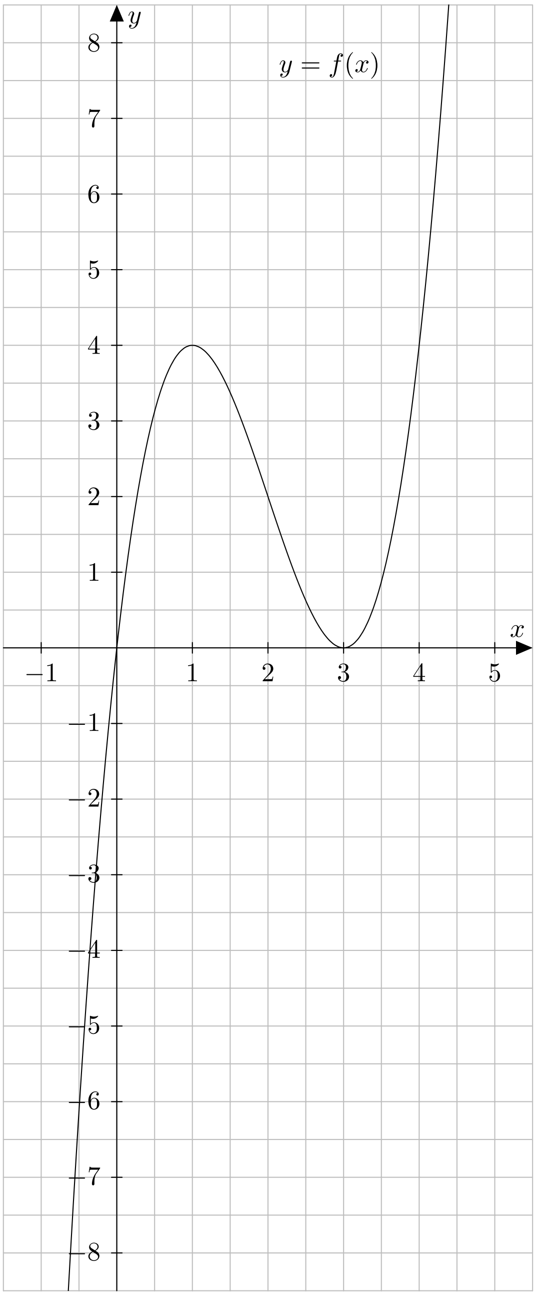
- Le sommet se calcule par

  ....

  ....

Lecture d'un graphe

On considère maintenant une fonction f dont on ne connaît pas l'expression algébrique (la "formule"), mais dont on connaît le graphe.



Compléter le tableau en lisant le graphe :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$					

Que vaut l'ordonnée à l'origine de f ?

. . . .

Quels sont les zéros de la fonction f ?

. . . .

Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 4$?

. . . .

Combien de solutions l'équation $f(x) = 3$ a-t-elle ?

. . . .

. . . .

Pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction f est-elle maximale ?

. . . .

. . . .

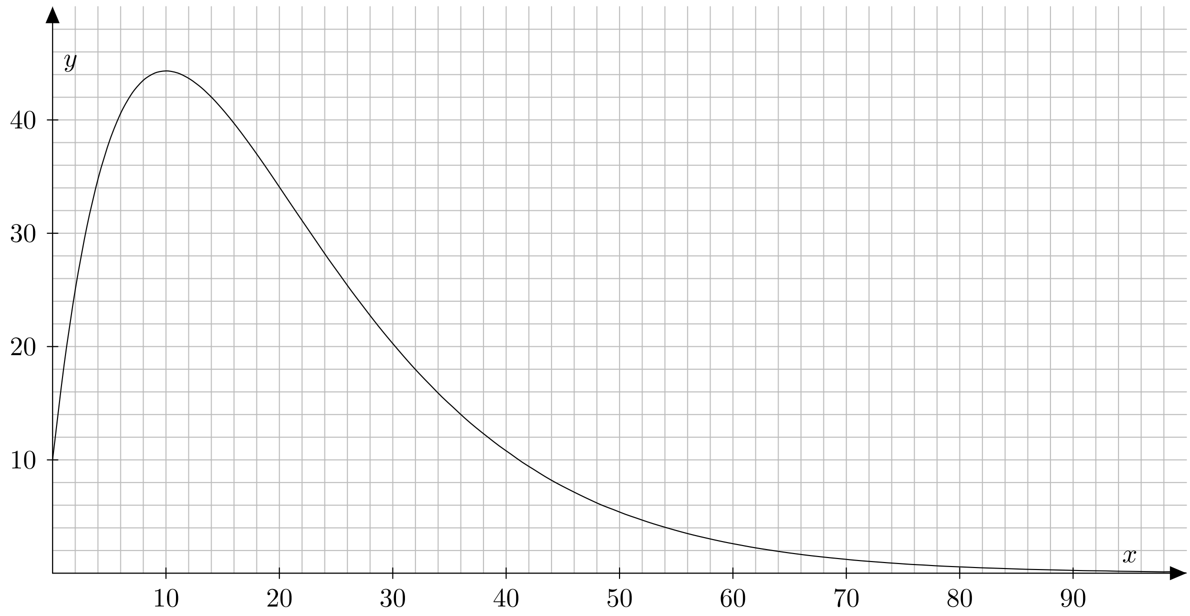
. . . .

Quand la fonction f est-elle décroissante ?

. . . .

Interprétation d'un graphe

On considère la fonction f donnée ci-dessous par son graphe. $f(x)$ représente le nombre de personnes atteintes par un virus x jours après la découverte de ce virus.



Au moment de la découverte du virus, combien de personnes sont-elles atteintes ?

. . . .

Après combien de jour y a-t-il le plus de personnes atteintes du virus ?

. . . .

A quel moment y a-t-il 30 personnes atteintes du virus ?

. . . .

Après 36 jours, combien y a-t-il de personnes atteintes du virus ?

. . . .

A long terme, combien de personnes seront atteintes du virus ?

. . . .

Pendant combien de temps le nombre de malades est-il en augmentation ?

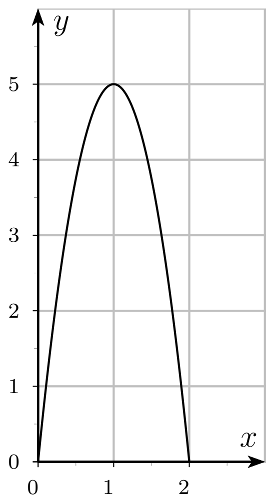
. . . .

Chapitre 2

Graphiques

Fonctions polynomiales

2.1 On a tracé ci-dessous le graphe d'une fonction f.



a) Déterminer graphiquement les zéros de f.

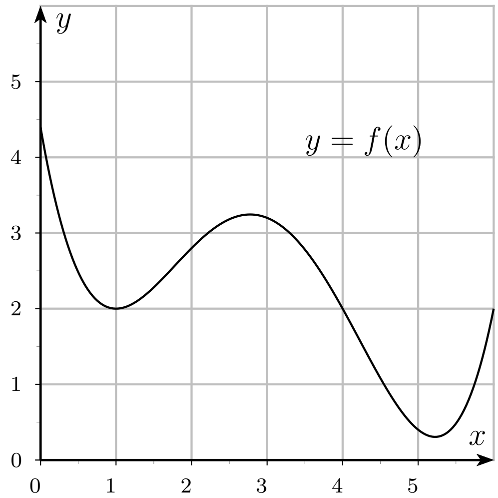
b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.

c) Donner les coordonnées du maximum de f.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente la hauteur (en mètres) d'une balle lancée verticalement depuis le sol, en fonction du nombre de secondes x écoulées depuis son lancer.

Interpréter par une phrase les trois réponses précédentes.

2.2 Une fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



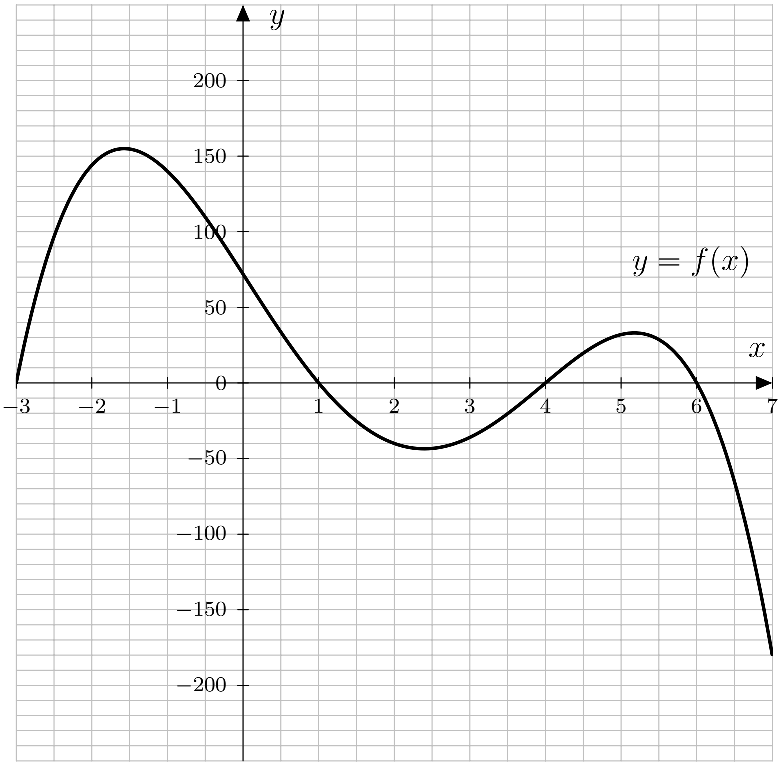
Estimer en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;
b) la valeur de $f(3)$;
c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;
d) les coordonnées du minimum de f ;
e) l'abscisse du maximum de f pour des valeurs de x comprises entre 0 et 6.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente l'intensité des précipitations (en millimètres par heure) durant l'après-midi du 17 mars 2009, en fonction du temps x, où x représente le temps (en heures) écoulé depuis midi.

Interpréter par une phrase chaque réponse donnée aux questions précédentes.

2.3 On a tracé ci-dessous le graphe d'une fonction f.



Déterminer graphiquement :

a) l'ordonnée à l'origine de f ;

b) la valeur de $f(2)$;

c) les solutions de l'équation $f(x) = 0$;

d) la valeur de x pour laquelle la fonction f est maximale ;

e) la valeur la plus basse que prend la fonction f.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente le bénéfice (en milliers de francs) d'une entreprise en fonction du temps x (en années) écoulé depuis le début de l'année 2010.

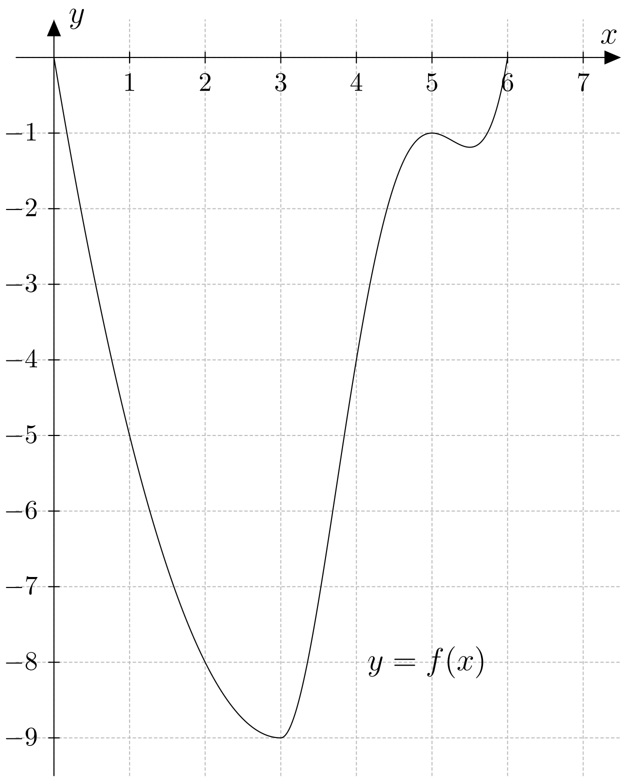
f) Interpréter les valeurs trouvées ci-dessus par des phrases.

g) Quelles sont les années durant lesquelles l'entreprise a été déficitaire ?

h) Si l'entreprise a été créée en 2007, a-t-elle été rentable la première année ?

i) Durant l'année 2013, le bénéfice de l'entreprise était-il en croissance ou en décroissance ?

2.4 Une fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer à l'aide du graphe :

a) la valeur de $f(1)$;

b) les coordonnées du minimum de f ;

c) les solutions de l'équation $f(x) = -7$.

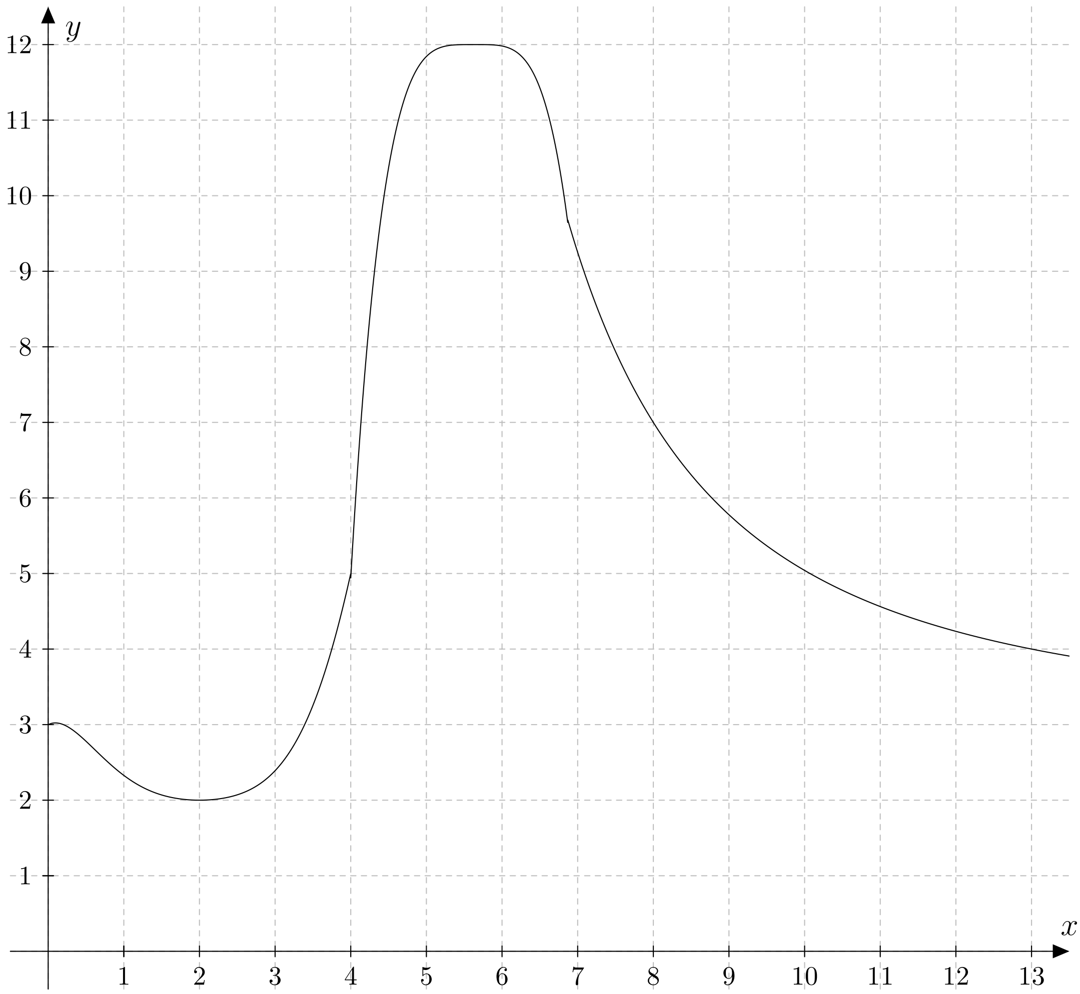
On suppose maintenant que $f(x)$ représente l'altitude (en mètres, par rapport au niveau de la mer) atteinte par un plongeur en fonction du temps x (en secondes).

d) Interpréter les valeurs trouvées ci-dessus par une phrase.

e) Après combien de temps est-il remonté à la surface ?

f) Est-il remonté directement à la surface ?

2.5 On a tracé ci-dessous le graphe d'une fonction f.



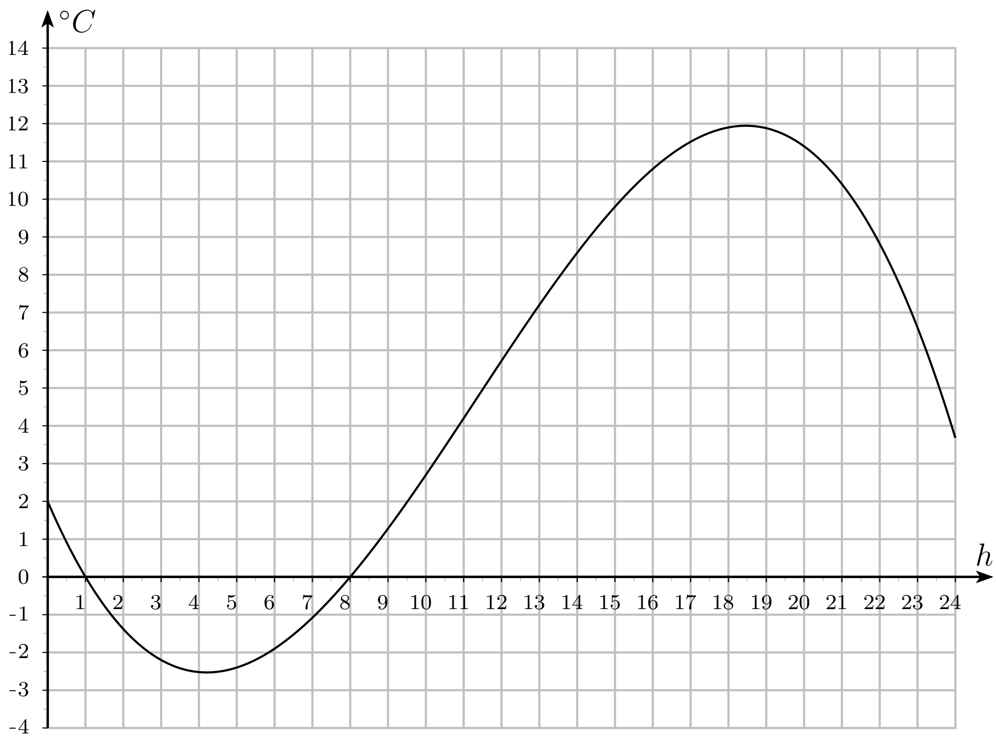
Déterminer graphiquement :

a) l'ordonnée à l'origine ;
b) la valeur maximale de $f(x)$;
c) les coordonnées du minimum de la fonction ;
d) les solutions de l'équation $f(x) = 5$.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente la force du vent (sur l'échelle de Beaufort) d'un typhon en fonction de la distance x (en dizaine de mètres) du centre du typhon.

Interpréter les valeurs trouvées ci-dessus par une phrase.

2.6 Le graphe ci-dessous représente la température en degrés Celsius dans une ville lors d'une journée d'un mois d'automne.



a) A quel(s) moment(s) durant cette journée la température a-t-elle été de zéro degré ?

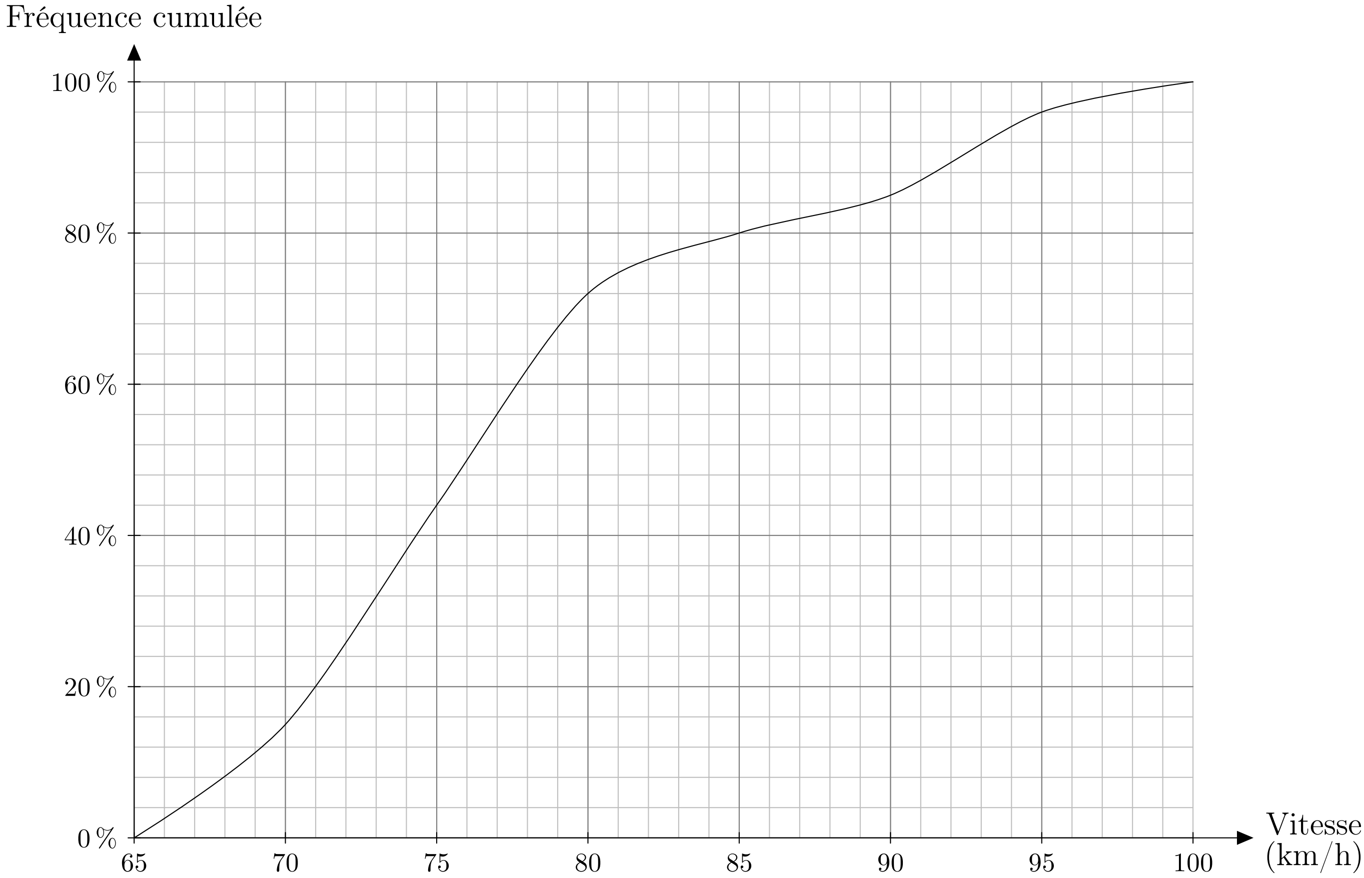
b) Quelle a été la température maximale atteinte cette journée-là ?

c) On considère généralement que les routes deviennent glissantes lorsque la température est inférieure à 3 degrés. Selon cette information, pendant quel intervalle de temps les routes de cette ville ont-elles été considérées comme glissantes ?

d) A partir de quelle heure la température a-t-elle commencé à augmenter ? Et jusqu'à quelle heure ?

2.7 Sur une route limitée à 80 km/h, on a relevé la vitesse d'un grand nombre de véhicules.
On a représenté ci-dessous la courbe des fréquences cumulées de ces données.

Rappel : $f(x)$ *représente le pourcentage de véhicules dont la vitesse mesurée est inférieure ou égale à* x.



a) Quel pourcentage de véhicules roulent à une vitesse autorisée sur cette route ?

b) Quelle proportion de véhicules roulent entre 90 et 95 km/h ?

c) Quel pourcentage de véhicule font un excès de vitesse de plus de 15 km/h ?

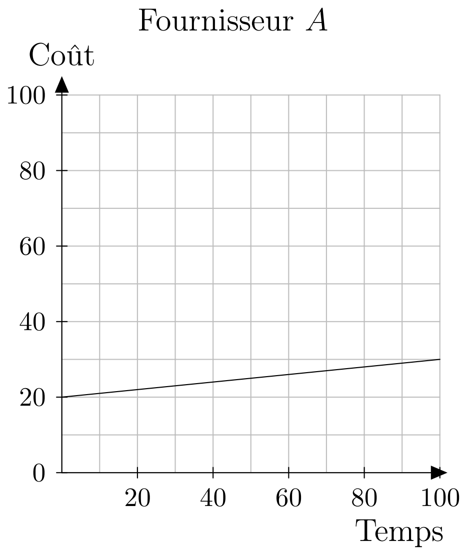
d) Quelle proportion de véhicules roulent à une vitesse s'écartant de plus de 10 km/h de la vitesse autorisée ?

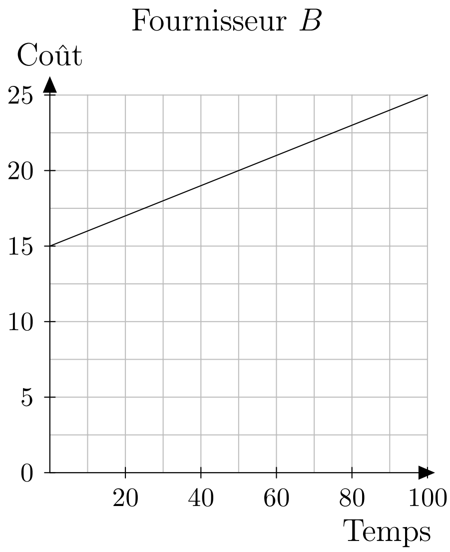
e) A quelle vitesse au maximum roule un véhicule qui fait partie des 20% les plus lents ?

2.8 a) Les deux graphiques ci-dessous représentent le prix (en francs) d'un abonnement de téléphone mobile en fonction du temps (en minutes) de communication par mois, chez deux fournisseurs différents.

Chez quel fournisseur le prix de base de l'abonnement est-il le moins cher ?

Et chez quel fournisseur la minute de communication est-elle la moins chère ?

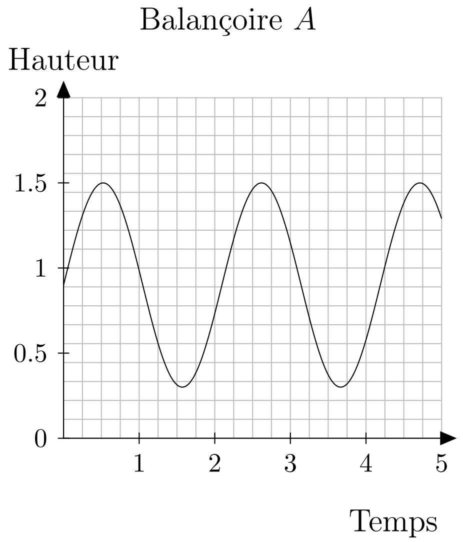


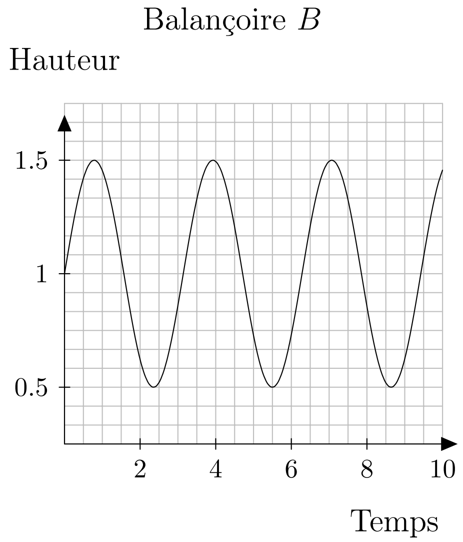


b) Les deux graphiques ci-dessous représentent la hauteur d'un enfant (en mètres) sur une balançoire en fonction du temps (en secondes).

Sur quelle balançoire l'enfant va-t-il le plus haut ?

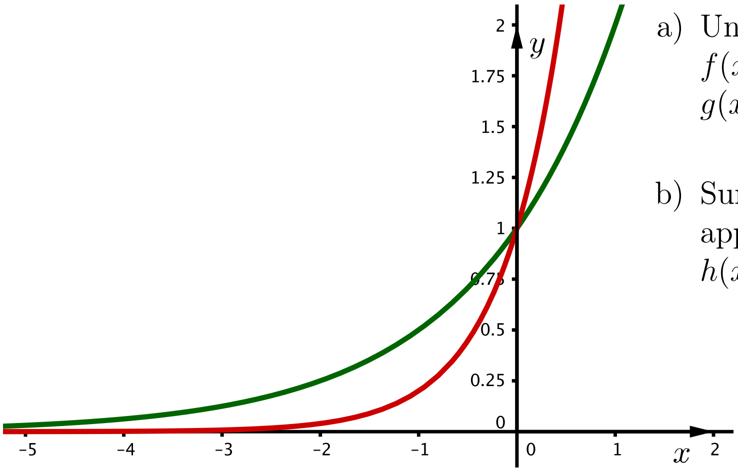
Sur quelle balançoire l'enfant fait-il le plus d'aller-retours par minute ?





Fonctions exponentielles

2.9

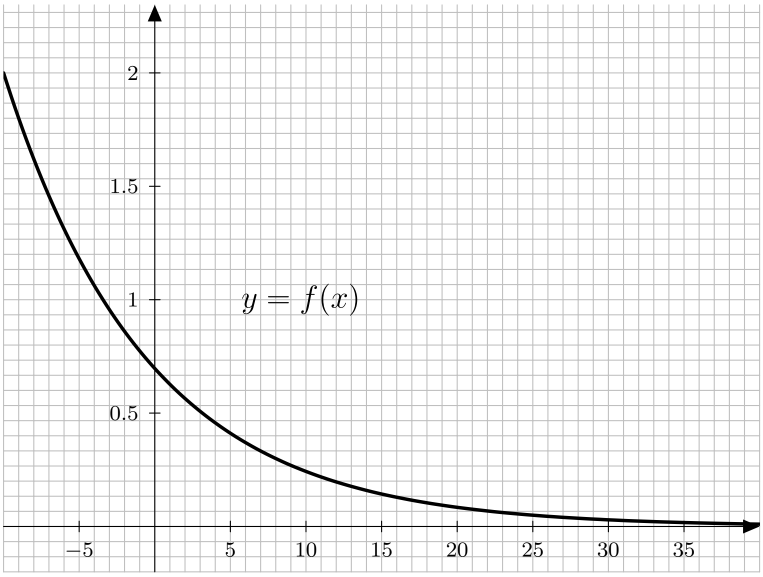


a) Une courbe de ce graphique représente $f(x) = 2^x$, l'autre courbe représente $g(x) = 5^x$. Déterminer qui est qui.

b) Sur ce même graphique, représenter approximativement la fonction $h(x) = 4^x$.

2.10 On a tracé ci-dessous une partie du graphe d'une fonction f représentant la quantité de glace (en décilitres) dans un verre de granita en fonction du temps x (en minutes).

On suppose que le verre a été acheté il y a 10 minutes et qu'en ce moment précis, $x = 0$.



a) Quelle quantité de glace y a-t-il en ce moment dans le verre ?

b) Quelle quantité de glace y avait-il dans le verre au moment de son achat ?

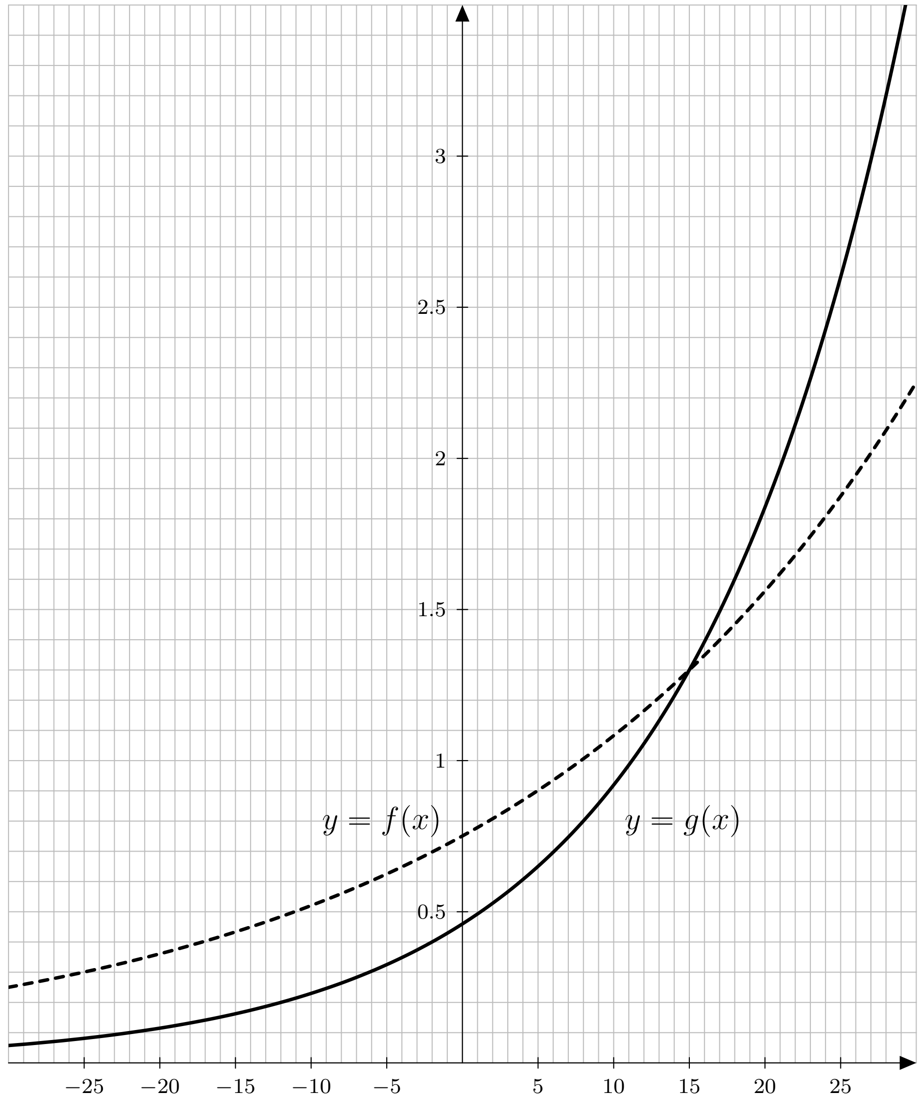
c) La fonction f est-elle croissante ou décroissante ? Interpréter cette réponse dans le contexte du verre de granita.

d) De quelle valeur se rapproche $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand ? Interpréter cette réponse dans le contexte du verre de granita.

2.11 On a tracé ci-dessous une partie du graphe de deux fonctions.

La fonction f, tracée en traitillés, représente la population (en millions) d'un pays A en fonction du temps x (en années).
La fonction g, en trait plein, représente la population (en millions) d'un autre pays B, également en fonction du temps x.

La valeur $x = 0$ correspond à la situation au premier janvier 2000.



a) Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine de chacune de ces fonctions. Interpréter le résultat obtenu dans ce contexte.

b) Quel pays avait la plus grande population en 2010 ? Quelles valeurs permettent de l'affirmer ?

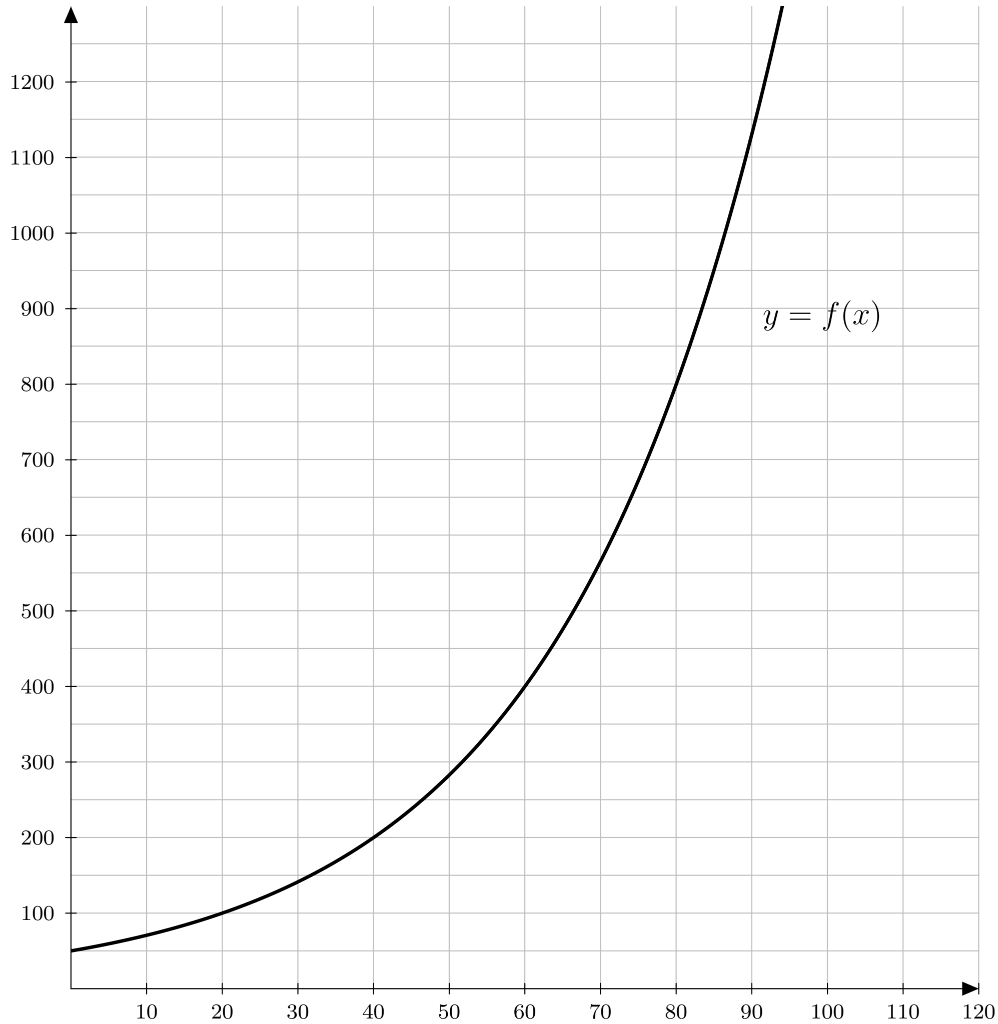
c) Quelle fonction croît le plus rapidement ? Qu'est-ce que cela signifie dans ce contexte ?

d) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Interpréter le résultat.

e) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$. Interpréter le résultat.

2.12 Un biologiste étudie l'évolution d'une population de bactéries placées dans une culture.
Ces bactéries vont se reproduire par division cellulaire, c'est-à-dire que chaque bactérie va se diviser pour former deux bactéries identiques, et ceci à intervalle régulier.

La fonction f, tracée ci-dessous, représente le nombre de bactéries présentes dans la culture du biologiste en fonction du temps (en minutes) écoulé depuis le début de l'expérience, à 8h du matin.



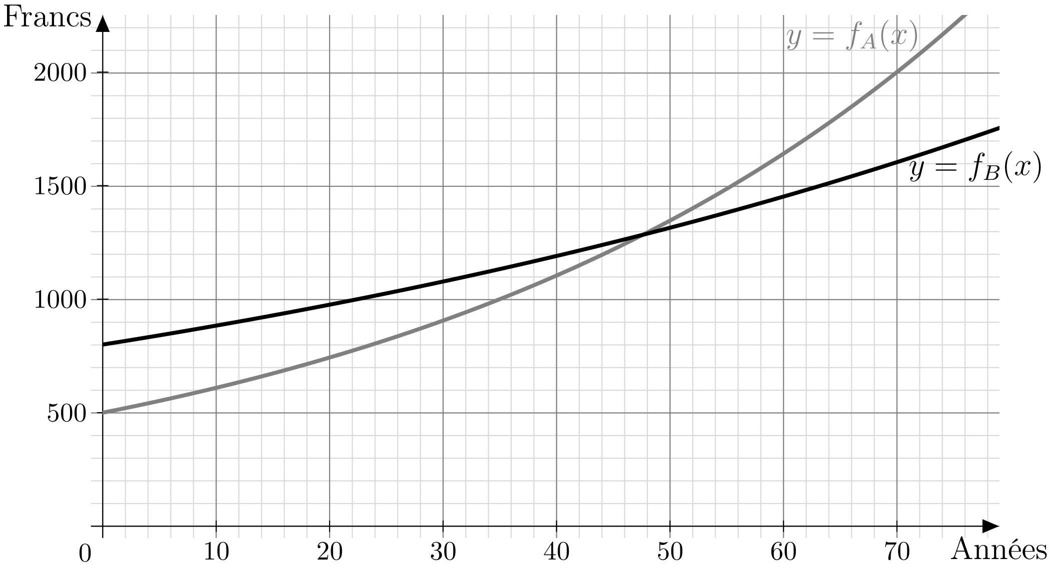
a) Combien y avait-il de bactéries dans sa culture au début de l'expérience ?

b) Sachant qu'il y a actuellement 700 bactéries dans la culture, déterminer approximativement l'heure qu'il est.

c) Après combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé ? Quadruplé ?

d) D'après ce graphique, a quel intervalle de temps intervient la division cellulaire ?

2.13 Les deux graphes ci-dessous représentent l'évolution du capital de deux comptes A et B en fonction des années depuis l'ouverture de ces comptes.



a) Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine de chacune de ces fonctions.
Interpréter ces réponses.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f_A(x) = f_B(x)$.
Interpréter la réponse.

c) Combien d'années faut-il pour que le capital placé sur le compte A dépasse celui du compte B ?

d) Combien y a-t-il d'argent sur chaque compte après 20 ans ?
A quoi correspondent ces valeurs par rapport aux fonctions f_A et f_B ?

e) Combien faut-il d'années à chaque placement pour que le capital double ?

Solutions des exercices

2.1

a) $x = 0$ et $x = 2$

b) $S \cong \{0.5\,;\,1.5\}$

c) Max $(1\,;\,5)$

Interprétations :

a) La balle était au niveau du sol au moment du lancer, et après 2 secondes.

b) La balle était à 4 mètres de hauteur après environ une demi-seconde, et après environ 1 seconde et demi.

c) La balle a atteint son point le plus haut après 1 seconde. Elle était alors à 5 mètres de hauteur.

2.2

a) $f(0) \cong 4.3$

b) $f(3) \cong 3.2$

c) $S = \{1\,;\,4\,;\,6\}$

d) min $(\sim 5.2\,;\,\sim 0.4)$

e) $x = 0$

Interprétations :

a) A midi, l'intensité de la pluie était de 4.3 mm/h.

b) A 15 heures, l'intensité de la pluie était de 3.2 mm/h.

c) Les moments où l'intensité était de 2 mm/h sont : à 13h, à 16h et à 18h.

d) Le moment où il a plu le moins fort était à 17h10. A ce moment, il a plu à 0.4 mm/h.

e) Le moment où la pluie était la plus forte était à midi.

2.3

a) ~ 70

b) ~ -40

c) $S = \{ -3 ; 1 ; 4 ; 6 \}$

d) ~ -1.6

e) ~ -180

Interprétations :

f)
- Au début de l'année 2010, le bénéfice était d'environ 70'000 francs.
- Au début de l'année 2012, le bénéfice était d'environ -40'000 francs, soit une perte de 40'000 francs.
- Au début des années 2007, 2011, 2014 et 2016, le bilan financier était à zéro. L'entreprise n'avait donc ni bénéfice, ni perte.
- Le bénéfice de l'entreprise était maximal vers l'été 2008.
- La perte la plus grande de l'entreprise était de 180'000 francs.

g) Elle a été déficitaire durant les années 2011, 2012, 2013 et 2016.

h) Oui, le bénéfice était positif durant cette année.

i) Même s'il était négatif, il était en croissance (en augmentation).

2.4

a) $f(1) = -5$

b) $\min(3 ; -9)$

c) $S \cong \{ 1.6 ; 3.5 \}$

d) a) Après 1 seconde, le plongeur était à 5 mètres de profondeur.
b) Le plongeur était au point le plus bas après 3 secondes ; il était alors à 9 mètres de profondeur.
c) Le plongeur était à 7 mètres de profondeur à deux moments : après 1.6 secondes et après 3.5 secondes.

e) Après 6 secondes.

f) Non, il est redescendu un peu après 5 secondes, lorsqu'il était à 1 mètre de profondeur.

2.5

a) $f(0) = 3$;

b) 12

c) $\min(2\,;\,2)$

d) $S = \{\,4\,;\,10\,\}$

Interprétations :

a) La force du vent au centre du typhon vaut 3.

b) La force du vent vaut au maximum 12.

c) La force du vent est minimale à 20 mètres du centre du typhon. Elle vaut alors 2.

d) La force du vent vaut 5 à deux endroits dans le typhon : à 40 mètres du centre et à 100 mètres du centre.

2.6

a) Il a fait 0 degré à 1h du matin et à 8h du matin.

b) La température maximale a été de 12 degrés.

c) Les routes ont été glissantes de minuit à environ 10 heures et quart.

d) La température a augmenté entre 4h du matin et 18h30 environ.

2.7

a) $\sim 72\%$, car $f(80) \cong 72$.

b) $\sim 10\%$, car $f(95) - f(90) \cong 96 - 86 = 10$.

c) $\sim 4\%$, car $100 - f(95) \cong 100 - 96 = 4$.

d) $\sim 29\%$, car $(100 - f(90)) + f(70) \cong (100 - 86) + 15 = 29$.

e) A 71 km/h, car $f(71) \cong 20$.

2.8

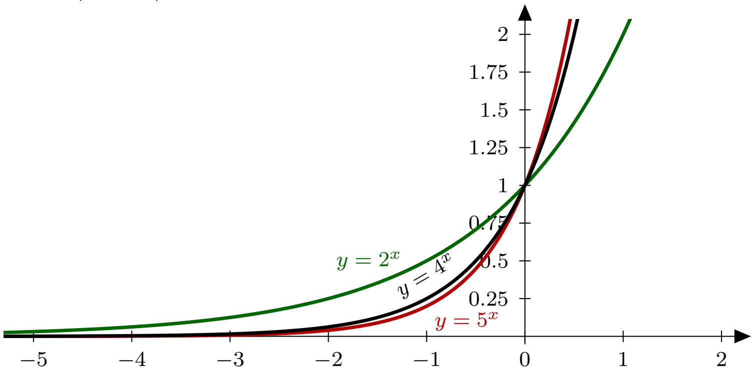
a) Le prix de base est moins cher chez le fournisseur B.

La minute de communication est le même prix chez les deux fournisseurs.

b) La hauteur maximale est la même sur les deux balançoires.

La fréquence est plus élevée sur la balançoire A.

2.9 a) et b)



2.10

a) ~ 0.7 dl $= 70$ ml

b) 2 dl

c) Décroissante. La quantité de glace diminue au fil du temps.

d) $f(x)$ se rapproche de 0. Plus on attend et plus la quantité de glace se rapproche de zéro. Si on attend suffisamment longtemps, il ne devrait plus y avoir de glace du tout.

2.11

a) $f(0) \cong 0.75$ et $g(0) \cong 0.47$.
Au début de l'année 2000, le pays A comptait environ 750'000 habitants et le pays B en comptait environ 470'000.

b) C'est le pays A, car $f(10) \cong 1.1$ et $g(10) \cong 0.9$. $f(10)$ est donc plus grand que $g(10)$.

c) C'est la fonction g. La population du pays B augmente plus rapidement que celle du pays A.

d) $S = \{15\}$. En début 2015, les populations des deux pays étaient égales.

e) $S =]15; 30[$. La population du pays A est inférieure à celle du pays B à partir de 2015.

2.12

a) $f(0) = 50$ donc il y avait 50 bactéries au début de l'expérience.

b) La solution de l'équation $f(x) = 700$ vaut un peu plus de 75. Il est donc un peu plus de 9 heures et quart.

c) Le nombre de bactéries a doublé après 20 minutes, et quadruplé après 40 minutes.

d) Toutes les 20 minutes puisque c'est le temps qu'il faut pour que leur nombre ait doublé.

2.13

a) $f_A(0) = 500$ et $f_B(0) = 800$.

Au début du placement, on dépose 500 francs sur le compte A et 800 francs sur le compte B.

b) $S = \{\sim 47\}$

c) 47 ans

Après 47 ans, il y a autant sur le compte A que sur le compte B.

d) Après 20 ans, il y a environ 750 francs sur le compte A, car $f_A(20) \cong 750$,

et environ 980 francs sur le compte B, car $f_B(20) \cong 980$.

e) Il faut environ 35 ans pour le compte A, car $f_A(35) \cong 2 * f_A(0)$,

et environ 70 ans pour le compte B, car $f_B(70) \cong 2 * f_B(0)$.