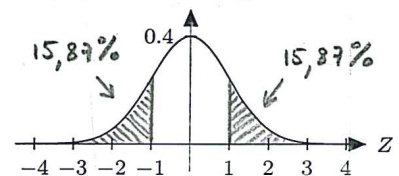


5.1

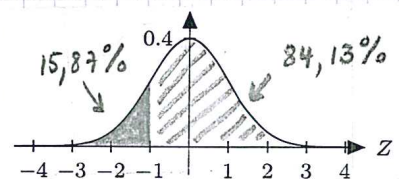
- a) Z se lit sur l'axe horizontal $\Rightarrow$ graphique 3
- b) Z se lit sur l'axe horizontal $\Rightarrow$ graphique 4
- c) Z se lit sur l'axe horizontal $\Rightarrow$ graphique 2
- d) la proba est donnée par l'aire sous la courbe $\Rightarrow$ graphique 5
- e) proba = aire sous la courbe $\Rightarrow$ graphique 1
- f) proba = aire sous la courbe $\Rightarrow$ graphique 6

5.3

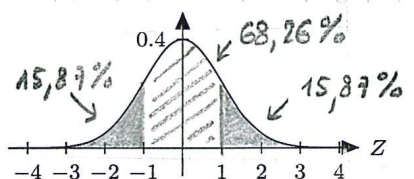
b) 1) $P(Z < -1) = P(Z > 1) \approx \underline{\underline{15,87\%}}$



2) $P(Z > -1) = 100\% - P(Z \leq -1)$
 $= 100\% - P(Z < -1)$
 $= 100\% - P(Z > 1)$
 $\approx 100\% - 15,87\% \approx \underline{\underline{84,13\%}}$



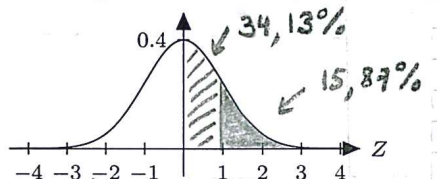
3) $P(-1 < Z < 1)$
 $= 100\% - P(Z \leq -1) - P(Z \geq 1)$
 $\approx 100\% - 2 \cdot 15,87\% \approx \underline{\underline{68,26\%}}$



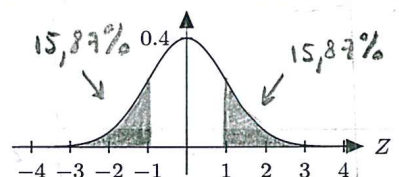
4) $P(0 < Z < 1) = 50\% - P(Z \geq 1)$
 $\approx 50\% - 15,87\% \approx \underline{\underline{34,13\%}}$

ou alors

$P(0 < Z < 1) = \frac{1}{2} P(-1 < Z < 1)$
 $\stackrel{3)}{=} \frac{1}{2} \cdot 68,26\% \approx \underline{\underline{34,13\%}}$



5) $P(|Z| > 1)$
 $= P(Z < -1) + P(Z > 1)$
 $\approx 2 \cdot 15,87\% \approx \underline{\underline{31,74\%}}$



5.4

La table donne $P(Z \leq z)$ pour $z \geq 0$

a) $P(Z = 0,5) = \underline{0}$ (Z est une variable continue $\Rightarrow$ la proba qu'elle prenne n'importe quelle valeur fixée vaut zéro)

$$b) P(Z > 1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) \approx 1 - 0,8944 = 0,1056 = \underline{10,56\%}$$

$$c) P(Z > 2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) \approx 1 - 0,9938 = 0,0062 = \underline{0,62\%}$$

$$d) P(Z < 2,5) \stackrel{Z \text{ est continue}}{=} P(Z \leq 2,5) \approx 0,9938 = \underline{99,38\%}$$

$$e) P(Z < -2,33) = P(Z > 2,33) = 1 - P(Z \leq 2,33) \\ \approx 1 - 0,9901 = 0,0099 = \underline{0,99\%}$$

$$f) P(Z > -1,25) = P(Z < 1,25) = P(Z \leq 1,25) = 0,8944 = \underline{89,44\%}$$

$$g) P(-2,33 < Z < 1,25) = P(Z < 1,25) - P(Z < -2,33) \\ = P(Z \leq 1,25) - (1 - P(Z \leq 2,33)) \\ \approx 0,8944 - (1 - 0,9901) = 0,8845 = \underline{88,45\%}$$

$$h) P(1,25 < Z < 2,5) = P(Z \leq 2,5) - P(Z \leq 1,25) \\ \approx 0,9938 - 0,8944 = 0,0994 = \underline{9,94\%}$$

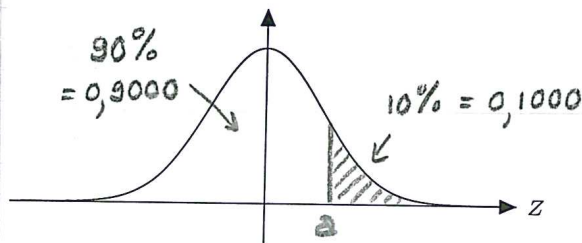
$$i) P(-0,5 < Z < 0) = P(0 < Z < 0,5) = P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq 0) \\ \approx 0,6915 - 0,5 = 0,1915 = \underline{19,15\%}$$

$$j) P(|Z| < 2,5) = P(-2,5 < Z < 2,5) = P(Z \leq 2,5) - P(Z \leq -2,5) \\ = P(Z \leq 2,5) - (1 - P(Z \leq 2,5)) \\ \approx 0,9938 - 1 + 0,9938 = 0,9876 = \underline{98,76\%}$$

$$k) P(|Z| > 0,5) = P(Z < -0,5) + P(Z > 0,5) = 2 \cdot P(Z > 0,5) \\ = 2 \cdot (1 - P(Z \leq 0,5)) \\ \approx 2 \cdot (1 - 0,6915) = 0,6170 = \underline{61,70\%}$$

$$l) P(Z \in]-\infty; 0[\cup]0,5; +\infty[) = P(Z < 0) + P(Z > 0,5) \\ = P(Z \leq 0) + 1 - P(Z \leq 0,5) \\ \approx 0,5 + 1 - 0,6915 = 0,8085 = \underline{80,85\%}$$

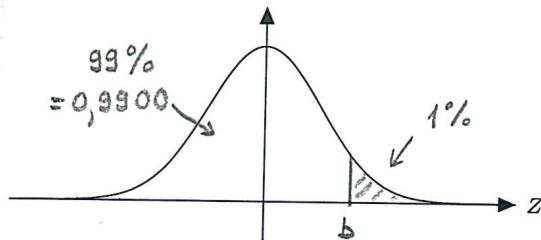
5.5



$$P(Z > a) = 10\%$$

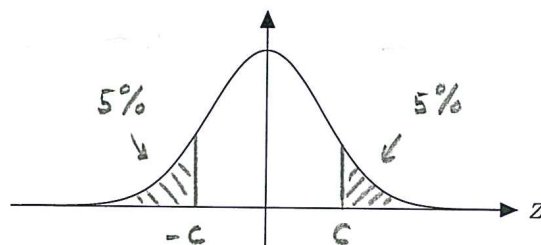
$$\Rightarrow a \approx 1,28$$

le plus proche de 0,9000 dans la table



$$P(Z > b) = 1\%$$

$$\Rightarrow b \approx 2,33$$

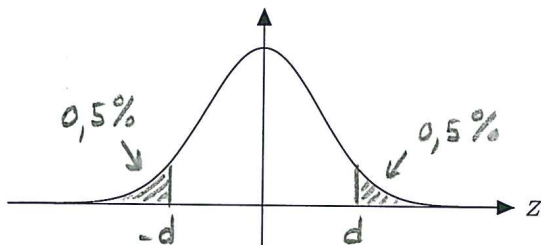


$$P(|Z| > c) = 10\%$$

2 valeurs aussi proches de 0,9500

$$\Rightarrow c = \frac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$$

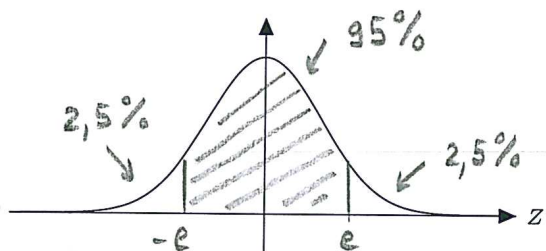
(car $P(Z \leq c) = 95\%$)



$$P(|Z| > d) = 1\%$$

$$\Rightarrow d = \frac{2,57 + 2,58}{2} = 2,575$$

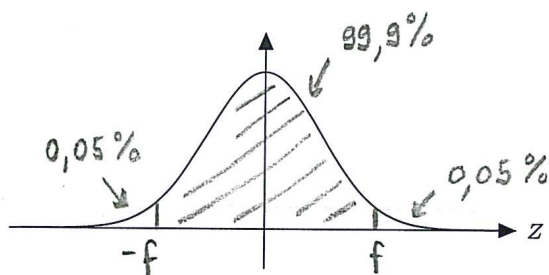
(car $P(Z \leq d) = 0,995$)



$$P(-e < Z < e) = 95\%$$

$$\Rightarrow e \approx 1,96$$

(Car $P(Z \leq e) = 97,5\%$)



$$P(-f < Z < f) = 99.9\%$$

$$\Rightarrow f \approx 3,29 \text{ (ou } 3,30 \text{)}$$

(car $P(Z \leq f) = 99,95\%$)

5.6

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 60) &= P\left(Z > \frac{60-50}{4}\right) = P(Z > 2,5) \\ &= 1 - P(Z \leq 2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062 = \underline{\underline{0,62\%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X > 3,9) &= P\left(Z > \frac{3,9-4}{0,3}\right) \approx P(Z > -0,33) \\ &= P(Z \leq 0,33) = 0,6293 = \underline{\underline{62,93\%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X < 325) &= P\left(Z < \frac{325-500}{100}\right) = P(Z \leq -1,75) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401 = \underline{\underline{4,01\%}} \end{aligned}$$

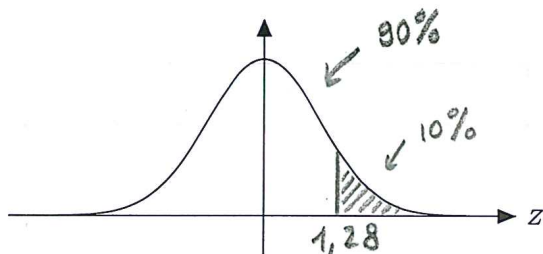
$$\begin{aligned} \text{d) } P(-1 < X < 2) &= P\left(\frac{-1-1,5}{2} < Z < \frac{2-1,5}{2}\right) = P(-1,25 < Z < 0,25) \\ &= P(Z \leq 0,25) - P(Z \leq -1,25) \\ &= P(Z \leq 0,25) - (1 - P(Z \leq 1,25)) \\ &= 0,5987 - 1 + 0,8944 = 0,4931 = \underline{\underline{49,31\%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } P(20 < X < 28) &= P\left(\frac{20-24}{5} < Z < \frac{28-24}{5}\right) = P(-0,8 < Z < 0,8) \\ &= P(Z \leq 0,8) - P(Z \leq -0,8) \\ &= P(Z \leq 0,8) - (1 - P(Z \leq 0,8)) \\ &= 2 \cdot P(Z \leq 0,8) - 1 = 2 \cdot 0,7881 - 1 = 0,5762 = \underline{\underline{57,62\%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } P(|X| > 1) &= P(X < -1) + P(X > 1) = P\left(Z < \frac{-1-0}{\sqrt{10}}\right) + P\left(Z > \frac{1-0}{\sqrt{10}}\right) \\ &\approx P(Z < -0,32) + P(Z > 0,32) \\ &= 1 - P(Z \leq 0,32) + 1 - P(Z \leq 0,32) \\ &= 2 - 2 \cdot P(Z \leq 0,32) = 2 - 2 \cdot 0,6255 = 0,7490 = \underline{\underline{74,90\%}} \end{aligned}$$

5.7

a)



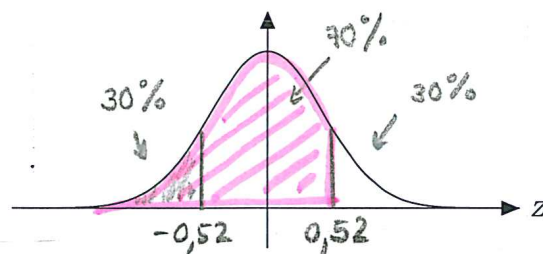
D'après la table ,

$$P(Z \geq 1,28) = 10\%$$

$$\Rightarrow P(X \geq \underbrace{1,28 \cdot 3 + 0}_{=c}) = 10\%$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = 3,84}}$$

b)



D'après la table ,

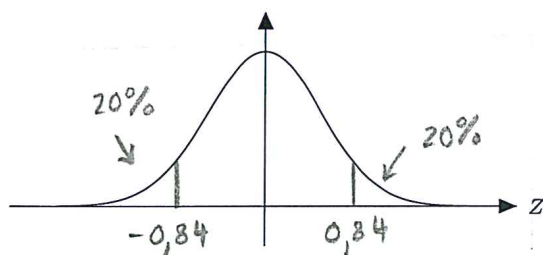
$$P(Z \leq 0,52) = 70\%$$

$$\Rightarrow P(Z \leq -0,52) = 30\%$$

$$\Rightarrow P(X \leq \underbrace{-0,52 \cdot 1 + 5}_{=c}) = 30\%$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = 4,48}}$$

c)



D'après la table ,

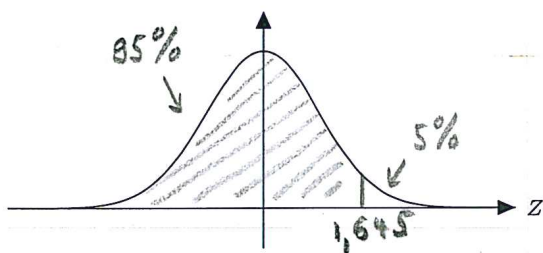
$$P(Z \leq 0,84) = 80\%$$

$$\Rightarrow P(Z > -0,84) = 80\%$$

$$\Rightarrow P(X > \underbrace{-0,84 \cdot 10 + 100}_{=c}) = 80\%$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = 91,6}}$$

d)



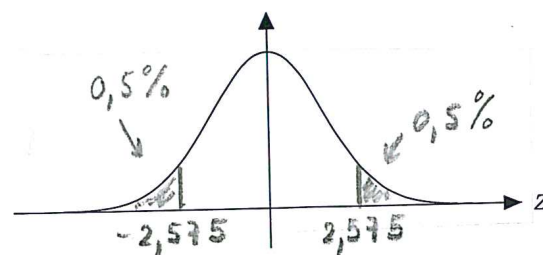
D'après la table ,

$$P(Z \leq 1,645) = 95\%$$

$$\Rightarrow P(X < \underbrace{1,645 \cdot 2 - 6}_{=c}) = 95\%$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = -2,71}}$$

e)



D'après la table ,

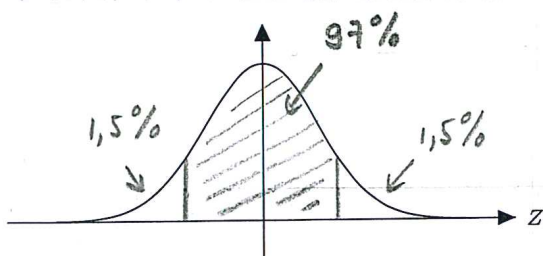
$$P(Z \leq 2,575) = 99,5\%$$

$$\Rightarrow P(|Z| \geq 2,575) = 1\%$$

$$\Rightarrow P(|X| \geq 2,575 \cdot 4) = 1\%$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = 10,30}}$$

f)



D'après la table ,

$$P(Z \leq 2,17) = 98,5\%$$

$$\Rightarrow P(-2,17 \leq Z \leq 2,17) = 97\%$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = 2,17 \cdot \sqrt{20} \approx 9,70}}$$

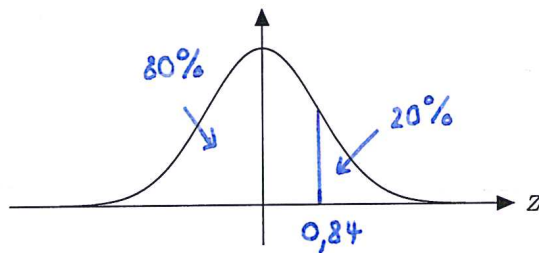
5.8

$$X \sim \mathcal{N}(42; 49)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 30) &= P\left(Z < \frac{30-42}{7}\right) = P(Z < -1,71) = 1 - P(Z < 1,71) \\ &= 1 - 0,9564 = 0,0436 = \underline{\underline{4,36\%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(39 \leq X \leq 56) &= P\left(\frac{39-42}{7} \leq Z \leq \frac{56-42}{7}\right) = P(-0,43 \leq Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -0,43) \\ &= P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 0,43)) \\ &= 0,9772 - 1 + 0,6664 = 0,6436 = \underline{\underline{64,36\%}} \end{aligned}$$

c) On cherche c tel que $P(X > c) = 20\%$



$$\begin{aligned} \Rightarrow c &= 0,84 \cdot 7 + 42 \\ &= 47,88 \end{aligned}$$

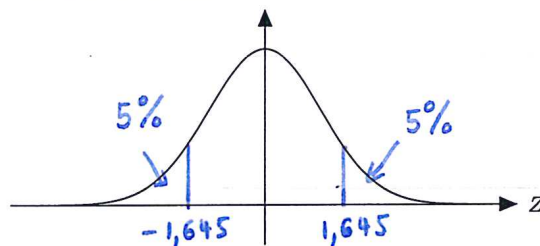
Nicole a environ 48 ans

5.9

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 125) &= P\left(Z > \frac{125-110}{10}\right) = 1 - P(Z \leq 1,5) \\ &= 1 - 0,9332 = 0,0668 = \underline{\underline{6,68\%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(95 \leq X \leq 125) &= P\left(\frac{95-110}{10} \leq Z \leq \frac{125-110}{10}\right) = P(-1,5 \leq Z \leq 1,5) \\ &= P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq -1,5) \\ &= P(Z \leq 1,5) - (1 - P(Z \leq 1,5)) \\ &= 2 \cdot P(Z \leq 1,5) - 1 = 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664 = \underline{\underline{86,64\%}} \end{aligned}$$

c) On cherche c tel que $P(X < c) = 5\%$



$$\begin{aligned} \Rightarrow c &= -1,645 \cdot 10 + 110 \\ &= 93,55 \end{aligned}$$

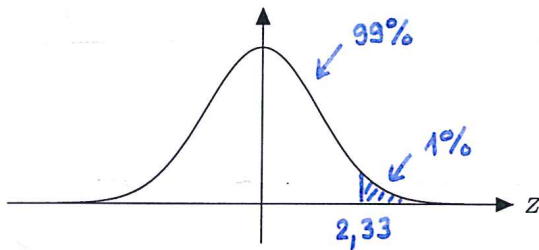
~ 94 heures

5.10

$$X \sim \mathcal{N}(16; 9)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 20) &= P\left(Z > \frac{20-16}{3}\right) = P(Z > 1,33) = 1 - P(Z \leq 1,33) \\ &= 1 - 0,9082 = 0,0918 = \underline{\underline{9,18\%}} \end{aligned}$$

b) On cherche c tel que $P(X > c) = 1\%$



$$\Rightarrow c = 2,33 \cdot 3 + 16 = 22,99$$

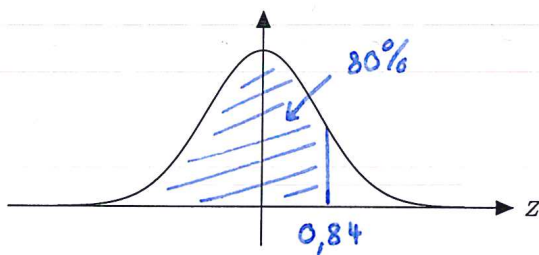
Il doit donc partir 23 minutes avant son train, soit à 7h12

5.11

$$\begin{aligned} \text{a) } P(92 < X < 108) &= P\left(\frac{92-100}{15} < Z < \frac{108-100}{15}\right) = P(-0,53 < Z < 0,53) \\ &= P(Z \leq 0,53) - P(Z \leq -0,53) \\ &= P(Z \leq 0,53) - (1 - P(Z \leq 0,53)) \\ &= 2 \cdot P(Z \leq 0,53) - 1 = 2 \cdot 0,7019 - 1 = 0,4038 = \underline{\underline{40,38\%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X < 70) &= P\left(Z \leq \frac{70-100}{15}\right) = P(Z \leq -2) = \\ &= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228 = \underline{\underline{2,28\%}} \end{aligned}$$

c) On cherche c tel que $P(X < c) = 80\%$



$$\Rightarrow c = 0,84 \cdot 15 + 100$$

$$= 112,6$$

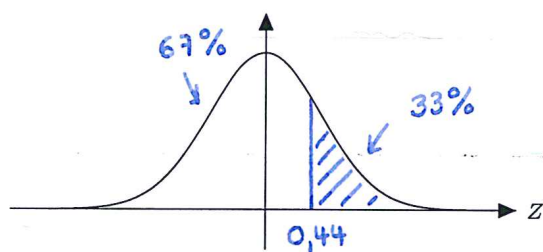
Il doit avoir ~ 113 de QI

5.12

$$X \sim \mathcal{N}(4,12 ; 2,7^2)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X > 5) &= P\left(Z > \frac{5 - 4,12}{2,7}\right) = P(Z > 0,33) = 1 - P(Z \leq 0,33) \\ &= 1 - 0,6293 = 0,3707 = \underline{\underline{37,07\%}} \end{aligned}$$

b) On cherche c tel que $P(X \geq c) = 33\%$



$$\Rightarrow c = 0,44 \cdot 2,7 + 4,12 \approx 5,3$$

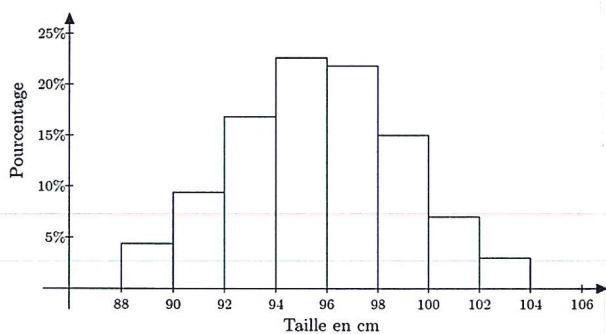
Il faut fixer le seuil à 5,3

5.13

a)

Taille en cm	Nombre de garçons	Fréquence (%)
< 90	22	4.4%
[90; 92[	47	9.4%
[92; 94[	84	16.8%
[94; 96[	113	22.6%
[96; 98[	109	21.8%
[98; 100[	75	15%
[100; 102[	35	7%
≥ 102	15	3%
Total	500	100%

b)



c) $\bar{x} \approx 95.72$ cm $\bar{x} \approx 95.72$ cm $s^2 \approx 3.31$ cm² $s \approx 1.82$ cm.

d) l'histogramme a une forme de cloche

$$\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(95,72 ; 3,31)$$

e) $P(X > 97)$

$$= P\left(Z > \frac{97 - 95,72}{1,82}\right)$$

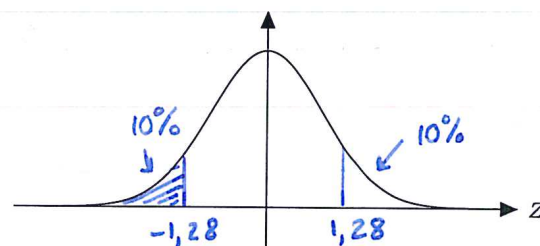
$$= P(Z > 0,65)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,65)$$

$$= 1 - 0,7422 = 0,2578$$

$$= \underline{\underline{25,78\%}}$$

f) On cherche c tel que $P(X \leq c) = 10\%$



$$\Rightarrow c = -1,28 \cdot 1,82 + 95,72$$

$$= 93,39$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{Il mesure } \sim 93 \text{ cm}}}$$

5.12 Dans une université, les examens d'admission en médecine sont notés au dixième sur une échelle de 1 à 6. On suppose que la distribution des résultats suit un modèle normal de moyenne 4.12 et d'écart-type 2.7.

- Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard ait une note supérieure à 5 ?
- Si l'université n'admet que 33% des candidats, à quelle note doit-elle fixer le seuil pour choisir les candidats admis ?

5.13 Le tableau suivant donne la répartition de 500 garçons de 3 ans en fonction de leur taille.

x_i	Taille en cm	Nombre de garçons	Fréquence (%)	F_i	$F_i \cdot x_i$	$F_i \cdot x_i^2$
89	< 90	22	4,4	4,4	3,916	348,524
91	[90; 92[	47	9,4	13,8	8,554	778,414
93	[92; 94[	84	16,8	20,6	15,627	1452,032
95	[94; 96[	113	22,6	27,2	21,47	2039,68
97	[96; 98[	109	21,8	35	21,146	2051,162
99	[98; 100[	75	15	40	14,85	1470,25
101	[100; 102[	35	7	47	7,07	714,07
103	≥ 102	15	3	100	3,09	310,27
	Total	500	100		95,72	9173,272

- Compléter la dernière colonne du tableau.
- Représenter les données par un histogramme en pourcentage.
- Calculer la moyenne, la médiane, la variance et l'écart-type de cet échantillon.
- D'après la forme de l'histogramme et les valeurs calculées, quel modèle peut-on utiliser pour décrire la taille d'un enfant de 3 ans ?
- Utiliser ce modèle pour calculer la probabilité qu'un enfant mesure plus de 97 cm.
- D'après ce modèle, combien mesure au maximum un enfant de 3 ans faisant partie des 10% les plus petits ?

c) $n = 95,72$ (cf tableau)

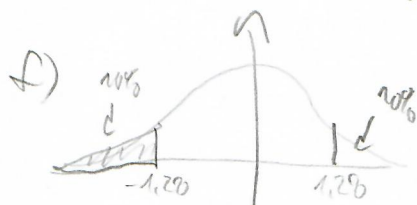
médiane: $\frac{96-94}{102-94} = \frac{53,2-30,6}{50-30,6} = \frac{22,6}{19,4}$

$Q_2 - 94 = \frac{2 \cdot 19,4}{22,6} \Rightarrow Q_2 = 94 + \frac{38,8}{22,6} = 94 + 1,717 = 95,717$

variance $\sigma^2 = 9173,272 - 95,72^2 = 10,9536 \Rightarrow$ écart-type $= \sigma = 3,31$

d) l'histogramme a une forme de cloche $\Rightarrow X \sim N(95,72; 3,31^2)$

e) $P(X > 97) = P(Z > \frac{97-95,72}{3,31}) = P(Z > 0,39) = 1 - P(Z \leq 0,39) = 1 - 0,6517 = 34,83\%$



On cherche tel que $P(X \leq c) = 10\%$ donc dans la table on trouve $90\% = 0,900$, le plus proche est $P(Z \leq 1,28) = 0,8997$
 $\Rightarrow Z = -1,28 = \frac{X - 95,72}{3,31}$ donc $-4,2368 = X - 95,72 \Rightarrow X = 91,4832$ cm $\Rightarrow$ au maximum 91,5 cm

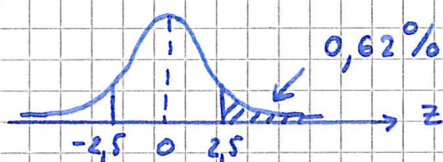
5.14

a) Par le TCL, car $n = 100 \Rightarrow n \geq 30$ b) $N = 3'000$ et $n = 100 \Rightarrow n \leq \frac{N}{20}$ (échantillon petit)

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20'000}{\sqrt{100}} = 2'000$$

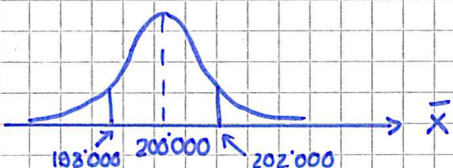
Ainsi, $\bar{x} \sim \mathcal{N}(200'000; 2'000^2) = \mathcal{N}(200'000; 4'000'000)$ c) $P(\bar{x} = 200'000) = 0\%$

$$d) P(195'000 < \bar{x} < 205'000) = P\left(-2,5 < Z < 2,5\right)$$



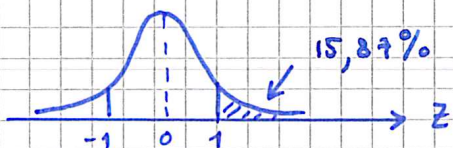
$$\approx 100\% - 2 \cdot 0,62\% \approx 98,76\%$$

e)



$$P(\bar{x} < 198'000 \text{ ou } \bar{x} > 202'000)$$

$$= P(|Z| > 1)$$



$$\approx 2 \cdot 15,87\% \approx 31,74\%$$

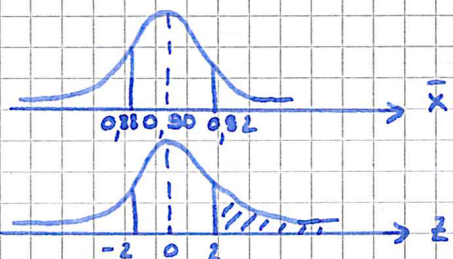
5.15

a) Par le TCL, car $n = 36 \Rightarrow n \geq 30$ b) N est supposé infini $\Rightarrow$ échantillon petit

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,06}{\sqrt{36}} = 0,01$$

Ainsi, $\bar{x} \sim \mathcal{N}(0,90; 0,01^2) = \mathcal{N}(0,90; 0,0001)$

c)



$$P(\bar{x} \leq 0,88 \text{ ou } \bar{x} \geq 0,92)$$

$$= P(|Z| > 2)$$

$$\approx 2 \cdot 2,28\% \approx 4,56\%$$

d) C'est un résultat assez rare, mais pas suffisamment pour prétendre que les câbles sont non conformes

5.16

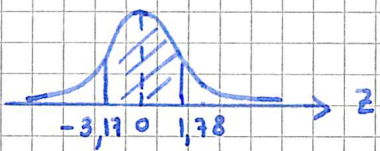
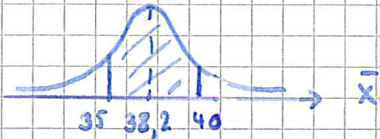
a) Parce que les données de base suivent déjà une loi normale

b) $N = 200$ et $n = 25 \Rightarrow n > \frac{N}{20}$ (grand échantillon)

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{5.4}{\sqrt{25}} \cdot \sqrt{\frac{175}{199}} \approx 1.01$$

Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(38.2; 1.01^2) = \mathcal{N}(38.2; 1.0201)$

c)



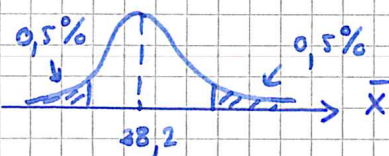
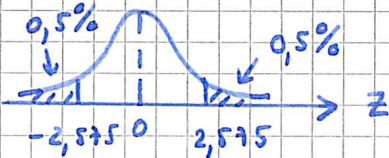
$$P(35 < \bar{X} < 40)$$

$$\approx P(-3.17 < Z < 1.78)$$

$$\approx 100\% - P(Z > 3.17) - P(Z > 1.78)$$

$$\approx 100\% - 0.08\% - 3.75\% \approx 96.17\%$$

d)



$$P(|Z| > 2.575) = 1\%$$

$\Rightarrow \bar{X}$ doit se trouver entre

$$38.2 - 2.575 \cdot 1.01 \approx 35.6 \text{ et}$$

$$38.2 + 2.575 \cdot 1.01 \approx 40.8 \text{ ans}$$

5.17

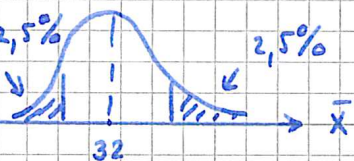
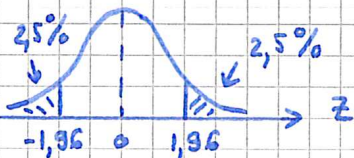
a) Par le TCL, car $n = 100 \Rightarrow n \geq 30$

b) N est supposé infini $\Rightarrow$ échantillon petit

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0.5$$

Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(32; 0.5^2) = \mathcal{N}(32; 0.25)$

c)



$$P(|Z| > 1.96) = 5\%$$

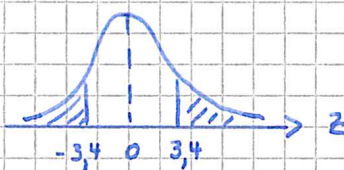
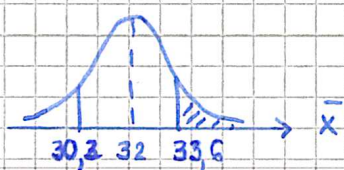
$\Rightarrow \bar{X}$ doit se trouver entre

$$32 - 1.96 \cdot 0.5 = 31.02 \text{ ans et}$$

$$32 + 1.96 \cdot 0.5 = 32.98 \text{ ans}$$

5.17 suite

d)



$$P(\bar{X} \geq 33,6 \text{ ou } \bar{X} \leq 30,2)$$

$$= P(|Z| \geq 3,2) = 2 \cdot P(Z \geq 3,2)$$

$$< 2 \cdot 0,07\% \approx 0,14\%$$

$\Rightarrow$ oui, c'est très étonnant !

5.18

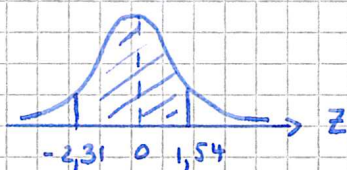
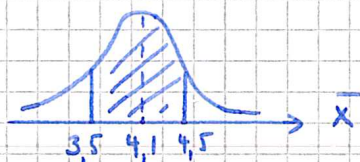
a) Parce que les données de base suivent déjà une loi normale

b) $N = 115$, $n = 22 \Rightarrow n > \frac{N}{20}$ (grand échantillon)

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{1,35}{\sqrt{22}} \cdot \sqrt{\frac{93}{114}} \approx 0,26$$

$$\text{Ainsi, } \bar{X} \sim \mathcal{N}(4,1; 0,26^2) = \mathcal{N}(4,1; 0,0676)$$

c)



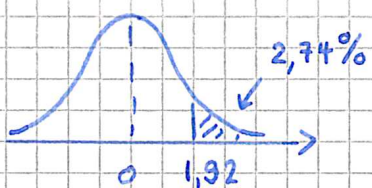
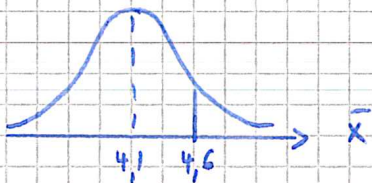
$$P(3,5 < \bar{X} < 4,5)$$

$$= P(-2,31 < Z < 1,54)$$

$$= 100\% - P(Z > 1,54) - P(Z > 2,31)$$

$$\approx 100\% - 6,18\% - 1,04\% \approx 92,78\%$$

d)



$$P(\bar{X} \geq 4,6) = P(Z \geq 1,92) \approx 2,74\%$$

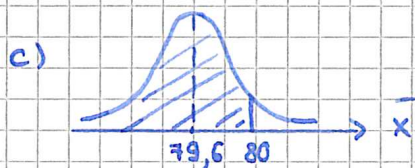
Oui, la classe a très bien réussi l'examen, puisque la proba d'obtenir une moyenne aussi haute est de 2,74%

5.19

a) Par le TCL, car $n = 500 \Rightarrow n \geq 30$

b) $N = 67'606$, $n = 500 \Rightarrow n < \frac{N}{20}$ (échantillon petit)

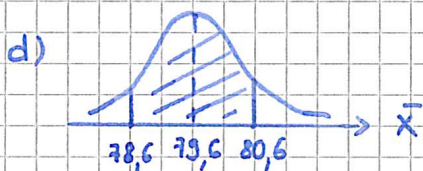
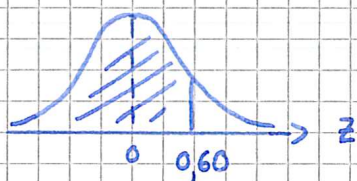
$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15,02}{\sqrt{500}} \approx 0,67 \text{ et } \bar{X} \sim \mathcal{N}(79,6; 0,4489)$$



$$P(\bar{X} < 80) = P(Z < 0,60)$$

$$= 100\% - P(Z \geq 0,60)$$

$$\approx 100\% - 27,43\% \approx 72,57\%$$

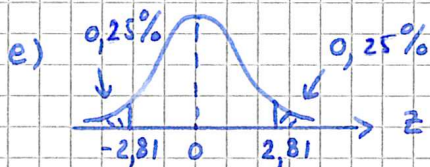
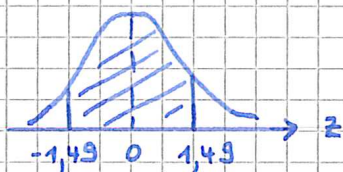


$$P(78,6 < \bar{X} < 80,6)$$

$$= P(|Z| < 1,49)$$

$$= 100\% - 2 \cdot P(Z > 1,49)$$

$$\approx 100\% - 2 \cdot 6,81\% \approx 86,38\%$$

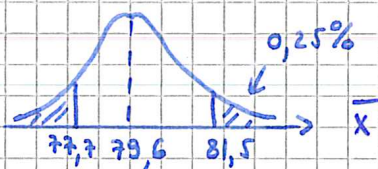


$$P(|Z| > 2,81) = 0,5\%$$

$\Rightarrow \bar{X}$ doit se trouver entre

$$79,6 - 2,81 \cdot 0,67 = 77,7 \text{ ans et}$$

$$79,6 + 2,81 \cdot 0,67 = 81,5 \text{ ans}$$



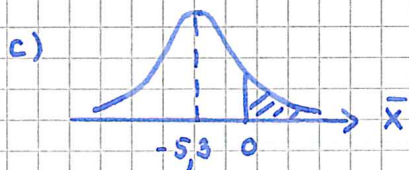
5.20

a) Par le TCL, car $n = 50 \Rightarrow n \geq 30$

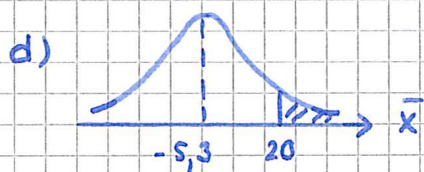
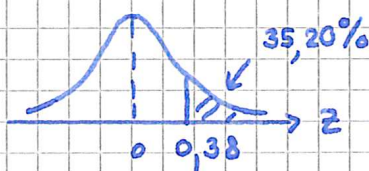
b) N est supposé infini $\Rightarrow$ échantillon petit

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{99,86}{\sqrt{50}} \approx 14,12$$

Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(-5,3 ; 14,12^2) = \mathcal{N}(-5,3 ; 199,37)$ en cts



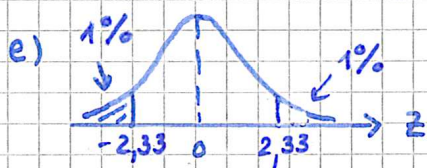
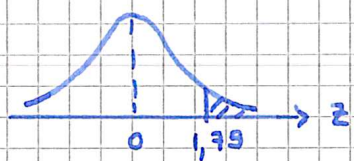
$$P(\bar{X} > 0) = P(Z > 0,38) \approx 35,20\%$$



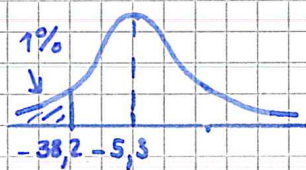
Gain total de 10.-

$\Rightarrow$ gain moyen de $\frac{10}{50} = 0,2$ frs = 20 cts

$$P(\bar{X} > 20) = P(Z > 1,79) \approx 3,67\%$$



$$P(Z < -2,33) = 1\%$$



Vous perdrez au maximum :

$$-5,3 - 2,33 \cdot 14,12 = -38,20 \text{ cts par partie}$$

$$\Rightarrow -38,20 \cdot 50 \approx 1910 \text{ cts}$$

soit 19,10 frs

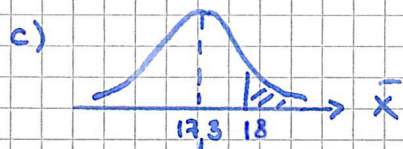
5.21

a) Par le TCL, car $n = 450 \Rightarrow n \geq 30$

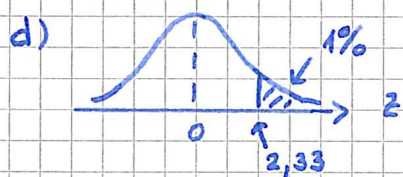
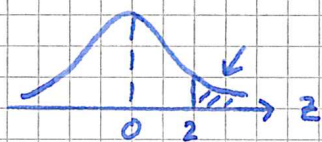
b) $N = 1500, n = 450 \Rightarrow n > \frac{N}{20}$ (grand échantillon)

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{8,90}{\sqrt{450}} \cdot \sqrt{\frac{1050}{1499}} \approx 0,35$$

Ainsi, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(17,30; 0,35^2) = \mathcal{N}(17,30; 0,1225)$

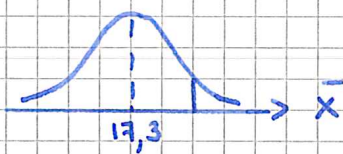


$$P(\bar{X} > 18) = P(Z > 2) \approx 2,28\%$$



$$P(Z > 2,33) = 1\%$$

Le montant moyen dépensé par un élève en voyage est au max. de $17,3 + 2,33 \cdot 0,35 = 18,12$



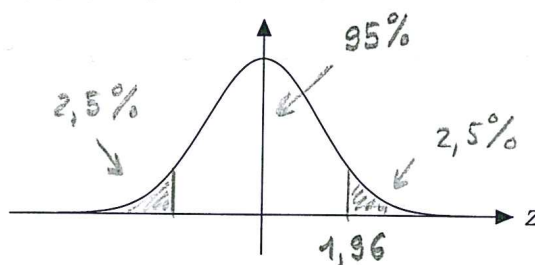
Ceci représente une perte totale de $18,12 \cdot 450 = 8154$ frs

5.22

a) $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,7}{\sqrt{100}} = 0,07$ (pas de facteur de correction car on suppose N infini)

$$E = 1,96 \cdot 0,07 = 0,1372$$

$$\Rightarrow I = [\bar{x} - E; \bar{x} + E] \\ \approx [49,6; 49,8]$$



Interprétation : il y a 95% de chances que le poids moyen de tous les contenants remplis par cette machine se situe entre 49,6 g et 49,8 g.

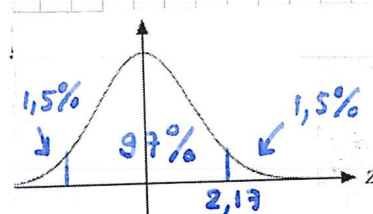
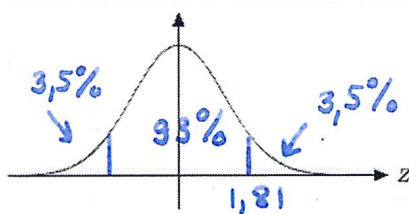
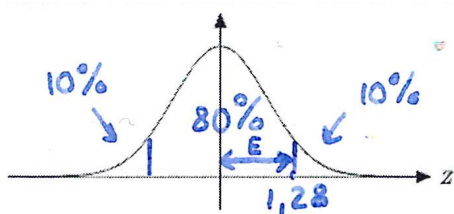
b) 5% (100% - 95%)

Il y a 5% de risque que le poids moyen de tous les contenants soit inférieur à 49,6 g ou supérieur à 49,8 g. ($\Rightarrow$ soit hors de l'intervalle construit en a))

c) $E \approx 0,1$ g.

Il y a 95% de chances que le poids moyen de tous les contenants soit au maximum à 0,1 g du poids moyen mesuré sur les 100 contenants de l'échantillon

5.23



a) i) 1,28 ii) 1,81 iii) 2,17

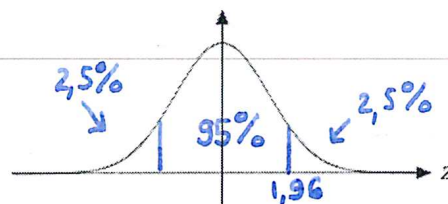
b) i) 80% ii) 80%

5.24

$$a) \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{3,5}{\sqrt{36}} \approx 0,58$$

$$E = 1,96 \cdot 0,58 \approx 1,1$$

$$\Rightarrow I = [\bar{x} - E; \bar{x} + E] \\ = \underline{\underline{[4,2; 6,4]}}$$



b) Population

X = durée des appels

95% de chances que

$4,2 \text{ min} \leq \mu \leq 6,4 \text{ min}$

σ = inconnu

$N = \infty$

Echantillon

$\bar{x} = 5,3 \text{ min}$

$\hat{\sigma} = 3,5 \text{ min}$

$n = 36$

c) Selon une étude effectuée par sondage, la durée moyenne des appels interurbains le jour de la fête des Mères est de 5,3 minutes.

Méthodologie

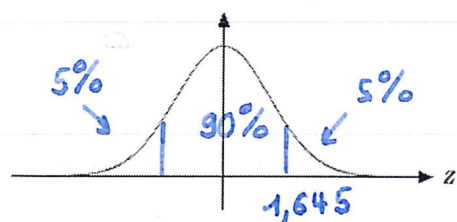
Ce sondage a été mené à partir d'un échantillon de 36 appels interurbains effectués le jour de la fête des Mères. Avec un échantillon de cette taille, la marge d'erreur est de 1,1 minutes, 19 fois sur 20.

$$\hookrightarrow \text{car } 95\% = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$$

5.25

$$a) \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{8,5}{\sqrt{200}} \cdot \sqrt{\frac{1000-200}{1000-1}} \approx 0,54$$

$\uparrow$ facteur de corr. pour grand échantillon



$$E = 1,645 \cdot 0,54 \approx 0,9$$

$$I = [\bar{x} - E; \bar{x} + E]$$

$$= \underline{\underline{[454,1; 455,9]}}$$

$\Rightarrow \mu$ se situe entre 454,1 ml et 455,9 ml

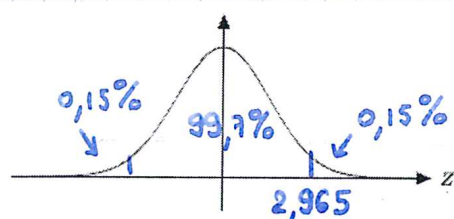
5.25 suite

b) Il y a 90% de chances que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et la moyenne de la population soit inférieur à 0,9 ml

c) i) une estimation ponctuelle (une seule valeur)

ii) une estimation par intervalle de confiance

d)



$$E = 2,965 \cdot 0,54 \approx 1,6 \text{ ml}$$

Diminuer le risque d'erreur a toujours un coût : ici, c'est la marge d'erreur (et donc l'intervalle) qui augmente.

L'estimation sera donc plus fiable (99,7% au lieu de 90%) mais presque 2 fois moins précise !

5.26

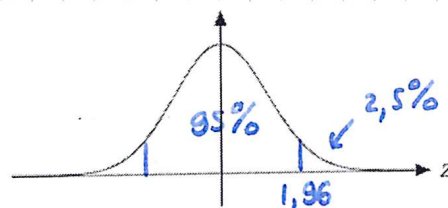
a) $n = 500$, $\bar{x} \approx 13,9$ et $\hat{\sigma} \approx 1,37$, N supposé ∞

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{1,37}{\sqrt{500}} \approx 0,06$$

$$E = 1,96 \cdot 0,06 \approx 0,1$$

$$\Rightarrow I = [\bar{x} - E; \bar{x} + E]$$

$$= [13,8; 14,0]$$



b) Oui, car la marge d'erreur est petite par rapport à la moyenne
 $\Rightarrow$ l'estimation ponctuelle suffirait

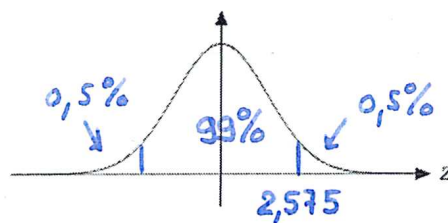
5.27

- a) Plus grande : on veut avoir plus de chances de tomber dans l'intervalle, on va donc l'agrandir
- b) Plus petite : en ayant un échantillon plus grand, on a une information meilleure sur la population
 $\Rightarrow$ plus fiable, la marge d'erreur diminue

5.28

On veut $E = 0,03$ kg

$$\text{Or } E = 2,575 \cdot \underbrace{\frac{0,1}{\sqrt{n}}}_{\sigma_{\bar{x}}}$$



$\Rightarrow$ on résout l'équation

$$0,03 = 2,575 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{n}} \quad | \cdot \sqrt{n}$$

$$0,03 \cdot \sqrt{n} = 2,575 \cdot 0,1 \quad | : 0,03$$

$$\sqrt{n} \approx 8,58 \quad | (\cdot)^2$$

$$n \approx 73,7 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\text{Il faut au moins 74 sacs}}}$$

5.29

On veut $E = 500$

$$\text{Or } E = 1,96 \cdot \frac{3500}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 500 = 1,96 \cdot \frac{3500}{\sqrt{n}} \quad | \cdot \sqrt{n}$$

$$500 \cdot \sqrt{n} = 1,96 \cdot 3500 \quad | : 500$$

$$\sqrt{n} = 13,72$$

$$n \approx 188,2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\text{Il faut au moins 189 familles}}}$$

5.30

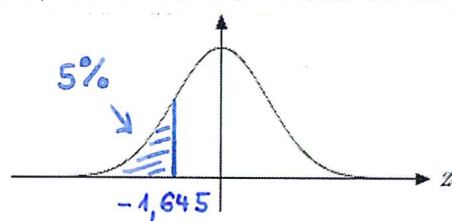
a) H_0 : le temps moyen d'écoute en 2012 vaut $\mu = 9,5$

H_1 : $\mu < 9,5 \Rightarrow$ test unilatéral

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{4,2}{\sqrt{64}} = 0,525 \quad (\text{pas de facteur de corr. car } N = \infty)$$

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}} = \frac{8,3 - 9,5}{0,525} \approx -2,29$$

$T \sim t_{63}$ (pas dans la table) et comme $n > 30$, $T \approx \mathcal{N}(0,1)$



Comme $T < -1,645$, on rejette H_0

$\Rightarrow$ le chercheur a raison, la moyenne a baissé significativement

b) 5% (risque de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie)

c) H_1

d) H_0

5.31

Par le TCL, $\bar{x} \sim \mathcal{N}(\mu; \frac{12}{\sqrt{36}}) = \mathcal{N}(\mu; 2)$

H_0 : $\mu = 100 \Rightarrow \bar{x} \sim \mathcal{N}(100; 2)$

Cote Z de 93,3 : $\frac{93,3 - 100}{2} = -3,35 \Rightarrow$ valeur très rare !

On rejette H_0 sans test d'hypothèse

Cote Z de 101,3 : $\frac{101,3 - 100}{2} = 0,65 \Rightarrow$ valeur fréquente !

On ne pourra pas rejeter H_0

Cote Z de 104,6 : $\frac{104,6 - 100}{2} = 2,3 \Rightarrow$ ni très fréquente, ni

très rare $\Rightarrow$ faire un test d'hypothèse

5.32

- a) On teste toujours H_0
- b) 3^e : c'est la proba de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie
- c) Faux : on ne peut jamais prouver que H_0 est vraie.

5.33

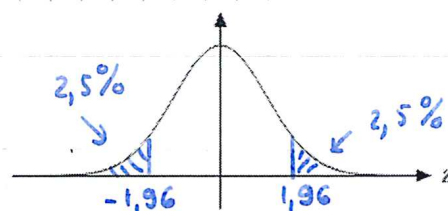
- a) H_0 : la machine verse en moyenne 500 ml
 H_1 : la machine ne verse pas en moyenne 500 ml (test bilatéral)
- b) H_0 : les touristes dorment en moyenne 2,7 nuits à Québec
 H_1 : les touristes dorment en moyenne plus de 2,7 nuits à Québec (test unilatéral)
- c) H_0 : la longueur moyenne des tiges est de 35 mm
 H_1 : la longueur moyenne des tiges n'est pas de 35 mm (test bilatéral)
- d) H_0 : le diamètre moyen des articles est de 6,25 cm
 H_1 : le diamètre moyen des articles est inférieur à 6,25 cm (test unilatéral)
- e) H_0 : le nombre moyen de jours d'absence des travailleuses du Québec ayant une garderie au travail est de 4,4 jours
 H_1 : ce nombre moyen est inférieur à 4,4 jours (test unilatéral)

5.34

- a) H_0 : le poids moyen est de 5 kg : $\mu = 5$
 H_1 : le poids moyen n'est pas de 5 kg : $\mu \neq 5$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0,18}{\sqrt{50}} \approx 0,025$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x} - 5}{0,025} \sim N(0;1)$$



$$\Rightarrow \text{on rejetera } H_0 \text{ si } \left| \frac{\bar{x} - 5}{0,025} \right| > 1,96 \Rightarrow \text{si } \bar{x} > 5,05 \text{ ou } \bar{x} < 4,95$$

5.34 (suite)

b) Oui, à 10h et à 16h

c) Il y a 5% de risque que l'on obtienne une valeur moyenne $< 4,95$ ou $> 5,05$, alors que la machine est bien réglée

5.35

$\bar{x} = 6$ et $\sigma = 3,2$ (donné !)

H_0 : le temps moyen est de 8,3 minutes

H_1 : le temps moyen est inférieur à 8,3 minutes (test unilatéral)

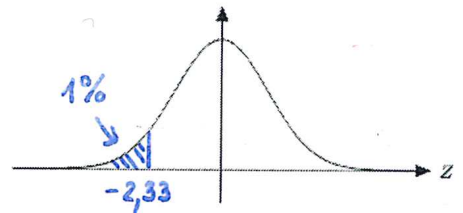
Ici, $n < 30$ mais les données initiales suivent une loi normale

$$\Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(8,3; 3,2^2/n) = \mathcal{N}(8,3; 0,64^2)$$

On doit rejeter H_0 si $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} < -2,33 \Rightarrow$ si $\bar{X} < -2,33 \cdot 0,64 + 8,3 \approx 6,8$

On a obtenu $\bar{x} = 6 < 6,8 \Rightarrow$ on rejette H_0

Le temps d'attente des clients a diminué avec l'informatisation



5.36

H_0 : durée de vie moyenne $\mu = 1000$ h

H_1 : durée de vie moyenne $\mu > 1000$ h (test unilatéral)

a) $\hat{\sigma} = 168 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{168}{\sqrt{100}} = 16,8$

On rejette H_0 si $\frac{\bar{X} - 1000}{16,8} > 2,33$

$$\Rightarrow \text{si } \bar{x} > 1039$$

C'est le cas avec notre échantillon $\Rightarrow$ le gaz a un effet positif

b) Au maximum 1%

c) Avec 1025 heures, on ne rejetterait pas H_0

Cela ne prouverait pas pour autant que H_0 est vraie !

