Statistiques inférentielles **3C**

Contexte

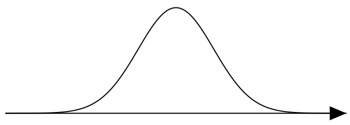
Les statistiques inférentielles ont pour but de déterminer les caractéristiques d'une population en utilisant les caractéristiques d'un échantillon provenant de cette population.

Il ne sera jamais possible de déterminer de manière exacte et certaine les caractéristiques de la population, mais il sera possible de les estimer plus ou moins précisément, en maîtrisant les risques de se tromper.

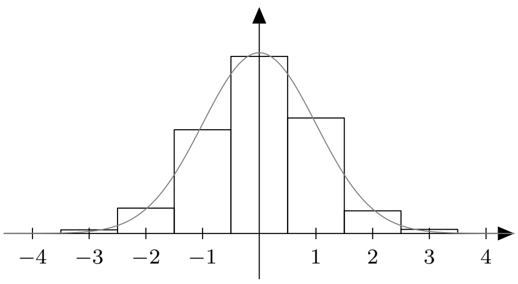
1 Loi normale

1.1 Définitions et notations

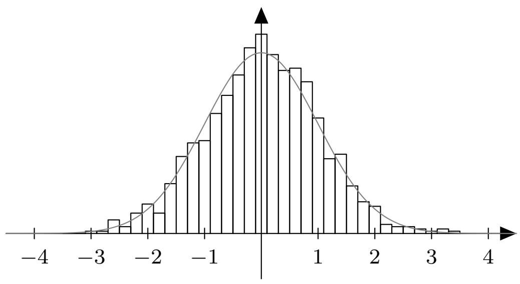
Dans de nombreux contextes, une variable statistique continue se distribue selon une courbe en cloche, appelée la courbe de Gauss.



Cette courbe en cloche correspond à la courbe de fréquence **théorique** de notre variable statistique. Si l'on disposait d'un échantillon extrêmement grand, et que l'on regroupait nos données en classes très petites, le polygone des fréquences que l'on obtiendrait ressemblerait à cette courbe.

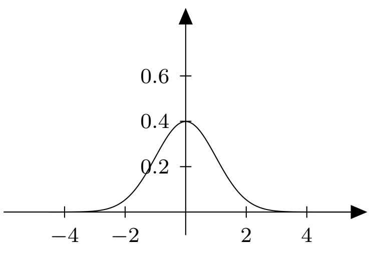


1000 données, 7 classes

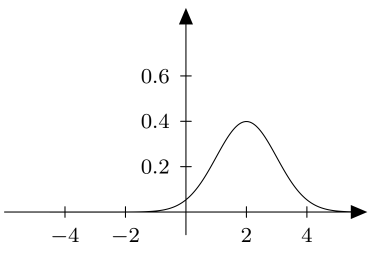


1000 données, 35 classes

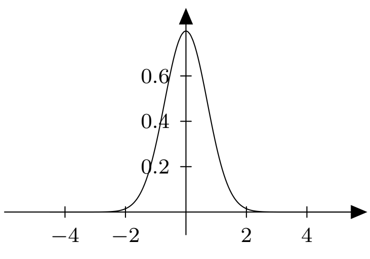
La distribution d'une variable suivant une loi normale ressemble toujours à une cloche, mais sa position et sa forme sont déterminées par la moyenne et la variance (ou l'écart-type) de la variable.



Moyenne $\mu = 0$, variance $\sigma^2 = 1$



Moyenne $\mu = 2$, variance $\sigma^2 = 1$



Moyenne $\mu = 0$, variance $\sigma^2 = 0.25$

Lorsqu'on dit qu'une variable suit une loi normale, on note : ....

Propriétés

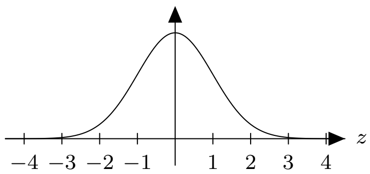
- La loi normale est symétrique autour de la moyenne μ
- L'aire sous la courbe vaut toujours 1

1.2 Représentation graphique

On considère une variable normale centrée réduite $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$.
(centrée : moyenne $\mu = 0$, réduite : variance $\sigma^2 = 1$)

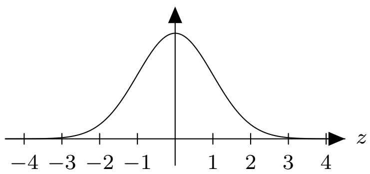
Sur la courbe de Gauss, on représente sur l'axe horizontal la valeur de la variable Z.
La probabilité d'obtenir certaines valeurs pour Z est donnée par l'aire sous la portion de courbe correspondante.

Exemples



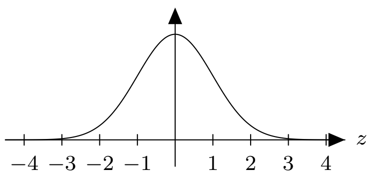
$Z = 1$

$P(Z = 1) =$ . . . .



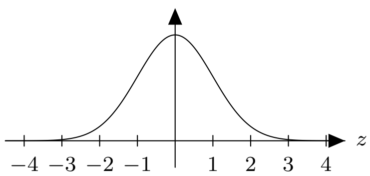
$Z < 0$

$P(Z < 0) =$ . . . .



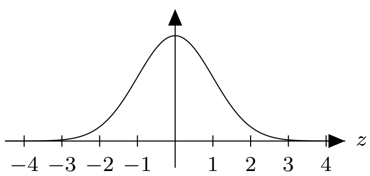
$-1 < Z \leq 2$ (noté aussi $Z \in]-1\,;\,2]$)

$P(-1 < Z \leq 2) = 0.8185 = 81.85\%$.



$|Z| > 1.5$ (noté aussi $Z \in]-\infty\,;\,-1.5[\cup]1.5\,;\,+\infty\,[$)

$P(|Z| > 1.5) = 0.1336 = 13.36\%$.

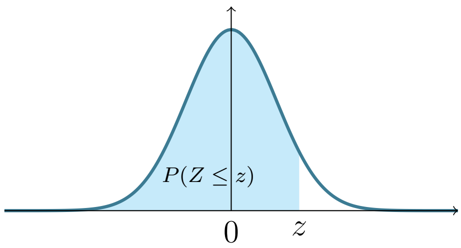


$Z \in \mathbb{R}$ (noté aussi $Z \in]-\infty\,;\,+\infty\,[$)

$P(Z \in \mathbb{R}) =$ . . . .

1.3 Calculs de probabilités avec la table numérique

La table numérique de la loi normale centrée réduite (formulaire p.28) donne la probabilité d'obtenir pour la variable $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ une valeur inférieure ou égale à une valeur donnée $z \geq 0$:

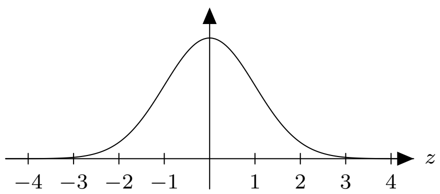


Toutes les probabilités s'obtiennent en se ramenant à des calculs du type $P(Z \leq z)$, grâce aux deux propriétés de la loi normale :

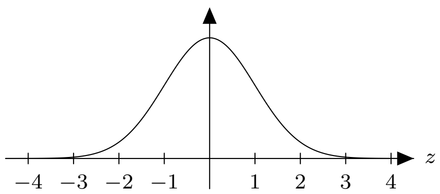
— symétrie autour de 0

— aire totale = 1 = 100%

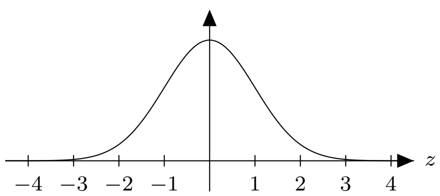
Exemples



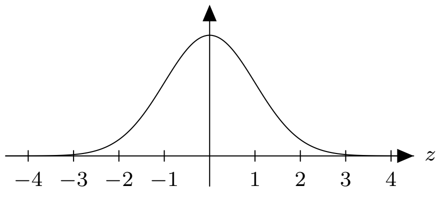
$P(Z \leq 1.25) =$ ....



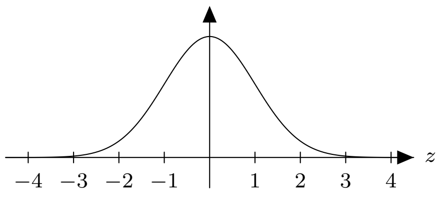
$P(Z > 1.25) =$ ....



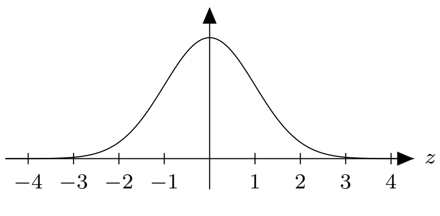
$P(Z < -0.5) =$ ....



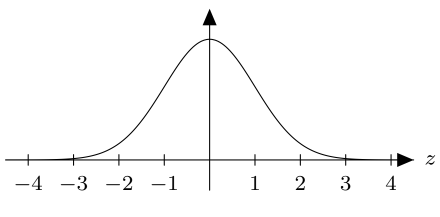
$P(Z > -0.5) =$ ....



$P(1 < Z < 2) =$ ....



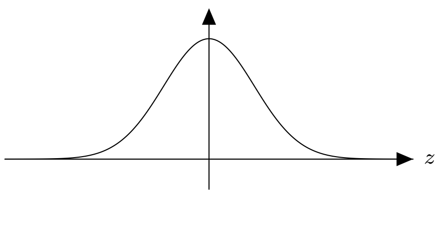
$P(-1.34 < Z < 2.11) =$ ....



$P(|Z| > 1.65) =$ ....

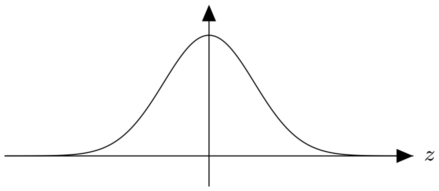
1.4 Recherche de quantiles avec la table numérique

Exemples

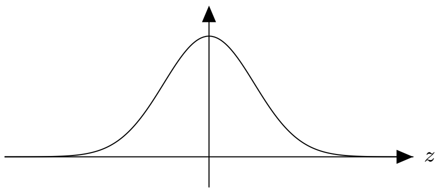


Déterminer a tel quel $P(Z \leq a) = 75\%$

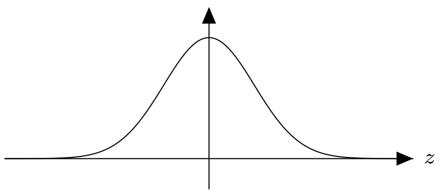
Remarque : $a = Q_3$ (troisième quartile).



Déterminer b tel quel $P(Z \geq b) = 10\%$



Déterminer c tel quel $P(|Z| < c) = 80\%$



Déterminer d tel quel $P(|Z| \geq d) = 5\%$

1.5 Normalisation et cote Z

Si une variable X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, alors la cote Z de cette variable suit une loi normale centrée réduite :

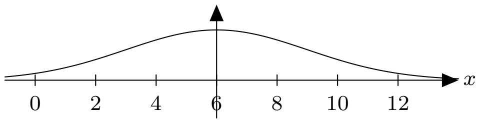
$$X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2) \qquad \Longrightarrow \qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$$

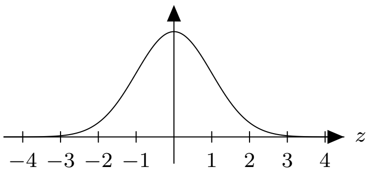
Lorsqu'on transforme une variable normale X en une variable normale centrée réduite Z, on dit qu'on **normalise** la variable X.

Comme on ne dispose pas d'une table numérique pour toutes les lois normales, on passera systématiquement par la cote Z lorsqu'on devra calculer des probabilités.

Exemples de calculs

a) Soit $X \sim \mathcal{N}(6;9)$. Calculer $P(X \leq 4)$.





b) Soit $X \sim \mathcal{N}(-1\,;\,0.01)$. Calculer $P(X > 0)$.

c) Soit $X \sim \mathcal{N}(3'000\,;\,40'000)$. Déterminer a tel que $P(X > a) = 2\%$.

Exemple de problème

Un maraîcher observe que le poids de ses tomates suit une loi normale de moyenne 200 g et d'écart-type 40 g.

a) Quelle est la probabilité que le poids d'une tomate soit supérieur à 250 g ?

b) Quelle est la probabilité que le poids d'une tomate se situe à moins de 20 g du poids moyen ?

c) Le maraîcher garantit un poids minimal pour les tomates qu'il vend. Sachant qu'il n'y a que 5% de ses tomates qui ne peuvent pas être vendues à cause de leur poids, déterminer quel est le poids minimal garanti.

2 Théorème Central Limite (TCL)

Lorsqu'on étudie une certaine variable statistique sur une population de taille N, on va très souvent calculer la moyenne de cette variable sur un échantillon de taille n (avec $n < N$). Il sera alors utile de savoir de quelle manière se distribue cette moyenne par rapport aux caractéristiques réelles (et souvent inconnues) de la population (appelées les **paramètres** de la population).

2.1 Enoncé du TCL pour la moyenne d'un échantillon

On considère une variable X dont la moyenne vaut μ et la variance vaut σ^2.
On calcule la moyenne de cette variable sur un échantillon de taille n :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Alors, si X suit une loi normale $\boxed{\text{ou}}$ si $n \geq 30$, la moyenne $\bar{X}$ suit également une loi normale.

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma_{\bar{X}}^2) \qquad \text{avec} \qquad \sigma_{\bar{X}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{si } n < \frac{N}{20} \text{ (petit échantillon)} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{sinon (grand échantillon)} \end{cases}$$

La moyenne $\bar{X}$ que l'on obtient se distribue donc selon une courbe en cloche, autour de la vraie moyenne de la population (paramètre μ). Plus l'échantillon est grand, plus l'écart-type de $\bar{X}$ est petit, donc plus on a de chances que la valeur obtenue pour $\bar{x}$ soit proche de la vraie moyenne de la population.

Remarque

Il ne faut pas confondre l'écart-type de la population, noté σ, et l'écart-type de $\bar{X}$, noté $\sigma_{\bar{X}}$!

2.2 Exemples

Mise en situation

Afin d'estimer le salaire moyen des anciens étudiants d'une université, on effectue un sondage auprès d'un échantillon de personnes en leur demandant leur salaire mensuel.

En interrogeant 30 personnes, on obtient un salaire mensuel moyen $\bar{x} = 7312$ francs.
En interrogeant 100 personnes, on obtient $\bar{x} = 7611$ francs.
Enfin, en interrogeant 1000 personnes, on obtient $\bar{x} = 7468$ francs.

Intuitivement, quelle estimation du salaire moyen est la plus précise ? . . . .

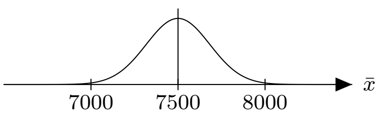
Pourquoi ? . . . .

. . . .

Cette intuition s'explique par le Théorème Central Limite :

Supposons que le salaire moyen de tous les anciens étudiants de cette université soit de 7500 francs par mois, avec un écart-type de 1000 francs.

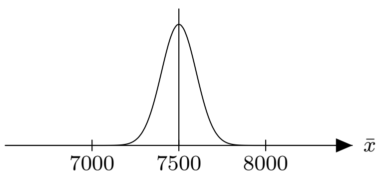
D'après le TCL, si $n \geq 30$, alors $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2_{\bar{X}})$



$n = 30$

$\mu =$ ....

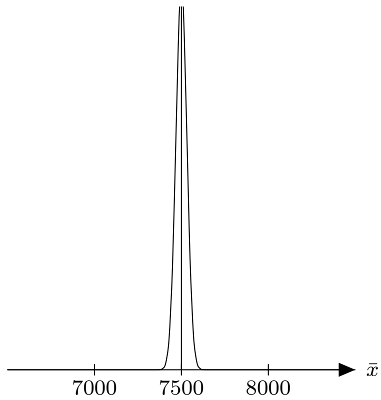
$\sigma_{\bar{X}} =$ ....



$n = 100$

$\mu =$ ....

$\sigma_{\bar{X}} =$ ....



$n = 1000$

$\mu =$ ....

$\sigma_{\bar{X}} =$ ....

On voit bien que plus l'échantillon est grand, plus le risque d'obtenir une moyenne éloignée de 7500 est .... car la variance (et l'écart-type) de $\bar{X}$ devient plus ....

Exemple de résolution d'exercice

Dans un supermarché, on a pu mesurer que les clients dépensaient en moyenne 250 francs le 24 décembre, avec un écart-type de 70 francs.
A la sortie du supermarché, on effectue un sondage auprès de 50 clients, en leur demandant le montant de leurs achats. On calcule ensuite la moyenne $\bar{x}$ des 50 réponses collectées.
On dénote par X le montant des achats des clients.

a) La variable X suit-elle une loi normale ?

b) La variable $\bar{X}$ suit-elle une loi normale ?

c) Quelle est la probabilité que la moyenne obtenue par ce sondage soit supérieure à 270 francs ?

d) Quelle est la probabilité que la moyenne obtenue par ce sondage se situe à moins de 10 francs de la vraie moyenne ?

e) Si l'on néglige les valeurs ayant moins de 0.3% de chances de se produire, entre quelles valeurs devrait se situer $\bar{X}$?

3 Intervalles de confiance

3.1 Exemple d'introduction

Supposons que l'on cherche à estimer la taille moyenne μ des femmes suisses.
On demande donc à 1000 femmes suisses choisies au hasard leur taille, et on en calcule la moyenne : $\bar{x} = 164.2$ cm.

Peut-on alors affirmer que $\mu = 164.2$, donc que la taille moyenne de toutes les femmes suisses vaut 164.2 cm ? ....

Il est évidemment impossible de connaître la valeur de la vraie moyenne μ sans avoir interrogé toutes les femmes suisses. On peut par contre estimer que :

la taille moyenne des femmes suisses vaut environ 164.2 cm

Une telle estimation s'appelle une **estimation ponctuelle** (par une seule valeur).

Le problème avec une estimation ponctuelle est qu'on ne sait rien sur l'erreur que l'on risque de commettre. La vraie moyenne μ s'éloigne-t-elle de quelques millimètres, de quelques centimètres ou de quelques dizaines de centimètres de cette mesure ?

On va donc préférer estimer μ par un **intervalle de confiance** :

Après quelques calculs, on pourra par exemple affirmer que

il y a 95% de chances que la taille moyenne de toutes les femmes suisses se situe entre 163.4 cm et 165.0 cm

Autrement dit,

il y a 95% de chances que la taille moyenne de toutes les femmes suisses se situe au maximum à 0.8 cm de notre estimation ponctuelle (164.2 cm)

3.2 Calcul d'un intervalle de confiance pour estimer une moyenne

Exemple 1

Reprenons l'exemple des 1000 femmes mesurant en moyenne 164.2 cm, et supposons que l'on connaisse l'écart-type de la taille des femmes suisses : $\sigma = 12.3$ cm.

On décide de calculer un intervalle de confiance à un **niveau de confiance de 95%**.

Rappel du TCL

Si X suit une loi normale ou si $n \geq 30$:

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma_{\bar{X}}^2) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{X}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{si } n < \frac{N}{20} \text{ (petit échantillon)} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{sinon (grand échantillon)} \end{cases}$$

Que représente la variable X dans ce cas ? ....

D'après le TCL, $\bar{X}$ suit bien une loi normale, car ....

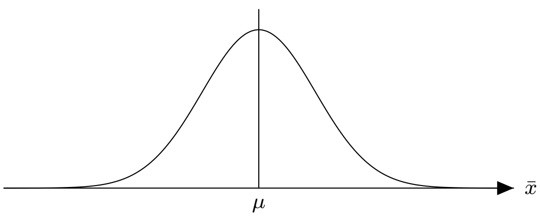
S'agit-il d'un petit échantillon ou d'un grand échantillon ?

....

....

Calcul de $\sigma_{\bar{X}}$: ....

Calcul de la marge d'erreur pour un intervalle à 95% :



Il y a 95% de chances que la zone colorée sous la courbe contienne la valeur 164.2 cm.

Autrement dit, il y a 95% de chances que la valeur que prend $\bar{X}$ (ici $\bar{x} = 164.2$ cm), se situe à moins de .... de la vraie moyenne μ.

Il y a donc aussi .... de chances que la vraie moyenne μ (inconnue) se situe à moins de .... de $\bar{x}$!

On peut donc construire un intervalle de confiance pour μ :

Interprétation :

....

....

Quel est le risque d'erreur de cet intervalle ? ....

Interprétation :

....

....

Ce risque d'erreur s'appelle le **seuil** de l'intervalle de confiance.

Exemple 2

Une ville comptant 17'000 ménages souhaite estimer le montant moyen qu'ils dépensent chaque année au restaurant.

Pour ceci, elle interroge 1570 ménages. Le montant moyen dépensé par cet échantillon est de 1807 francs par année, avec un écart-type corrigé de 556 francs.

Construire un intervalle de confiance avec un niveau de confiance de 90% pour estimer le montant moyen dépensé par l'ensemble des ménages de cette ville.

Remarque importante

Ici, on ne connaît pas l'écart-type de la population. On va donc l'estimer en utilisant les données de l'échantillon.
L'écart-type de l'échantillon, noté s, n'est pas un bon estimateur pour σ. On va donc utiliser l'écart-type corrigé, noté $\hat{\sigma}$, qui se calcule comme suit :

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$$

— Résumé des données connues :

Population	**Echantillon**
N	n
μ	$\bar{x}$
σ	$\hat{\sigma}$

— Vérification des conditions d'application du TCL

....

— Petit échantillon ou grand échantillon ?

....

— Calcul ou estimation de $\sigma_{\bar{X}}$

— Calcul de la marge d'erreur

— Calcul de l'intervalle de confiance

— Interprétation :

....

....

....

....

3.3 Choix de la taille de l'échantillon

Supposons que l'on souhaite estimer la moyenne d'âge des étudiants d'une université par un intervalle de confiance.

L'intervalle se construit avec la formule suivante :

$$I = [\,\bar{x} - \underbrace{\sigma_{\bar{X}} \cdot q}_{E}\,;\, \bar{x} + \underbrace{\sigma_{\bar{X}} \cdot q}_{E}\,]$$

On observe que :

— Plus l'intervalle est ...., plus l'estimation est précise.

— La taille de l'intervalle ne dépend pas de ...., mais seulement de ....

— Si l'on diminue la marge d'erreur E, l'intervalle devient plus ....

— Si l'on augmente le niveau de confiance, q devient plus ...., et donc la marge d'erreur ....

— Si l'on augmente la taille n de l'échantillon, $\sigma_{\bar{X}}$ devient plus ...., et donc la marge d'erreur ....

Pour garantir une certaine précision dans notre estimation, on peut vouloir fixer une taille maximale pour l'intervalle de confiance.

Pour garantir que l'intervalle ne devienne pas trop grand, on peut jouer sur deux critères :

— **le niveau de confiance :**
Pour diminuer la marge d'erreur, on doit .... le niveau de confiance.
Inconvénient : ....

— **la taille de l'échantillon :**
Pour diminuer la marge d'erreur, on doit .... la taille de l'échantillon.
Inconvénient : ....

Revenons à l'estimation de l'âge moyen des étudiants de cette université.

Si l'on souhaite garder un niveau de confiance de 95%, et si l'on sait que des études antérieures ont donné un écart-type σ de 5.7 ans pour la population, quelle doit être la taille minimale de notre échantillon pour que la largeur de l'intervalle de confiance ne dépasse pas 3 ans ?

On veut que $E =$ ....

Formule pour le calcul de la marge d'erreur : $E =$ ....

4 Tests d'hypothèse pour une moyenne

4.1 Exemple 1

Un enseignant de sport observe depuis des années que le temps que mettent ses élèves pour courir 5 km suit une loi normale $\mathcal{N}(28; 2.25)$. Au début d'une année scolaire, il décide de faire courir ses élèves chaque semaine pour tenter d'améliorer leur endurance. A la fin de l'année, il mesure le temps que mettent ses 23 élèves pour courir 5 km, et obtient une moyenne de 27 minutes.

Peut-il affirmer que sa classe est meilleure que les élèves qu'il a eu au cours des dernières années, ou la différence est-elle trop petite pour être significative ?
Pourrait-elle simplement venir des variations normales des performances des élèves ? Autrement dit, est-il plausible d'obtenir une moyenne de 27 minutes dans un échantillon, alors que la vraie moyenne est de 28 minutes ?

Pour répondre à cette question, on va procéder à un **test d'hypothèse**.

1. **Formulation des hypothèses**

   On pose **l'hypothèse nulle**, qui est l'hypothèse sous laquelle on peut faire des calculs statistiques.

H_0 :	Le temps que mettent les élèves de cette classe suit une loi de moyenne .... minutes.

   On pose également **l'hypothèse alternative**

H_1 :	Le temps que mettent les élèves de cette classe suit une loi de moyenne .... minutes.

   Remarques

   — Le but de ce test est de .... H_0, afin de .... H_1.

   — Comme on teste $\boxed{\mu = 28}$ contre $\boxed{\mu < 28}$,
   il s'agit d'un test .... (d'un seul côté).

   Si on voulait tester $\boxed{\mu = 28}$ contre $\boxed{\mu \neq 28}$,
   on procéderait à un test .... (des deux côtés).

2. **Seuil de signification du test**

   Comme dans le cas d'un intervalle de confiance, on doit choisir quel niveau de confiance on souhaite, et quel risque d'erreur on accepte.

   Le **seuil** d'un test statistique représente le risque d'erreur.
   C'est le risque de .... H_0 alors que cette hypothèse est ....

   Posons comme seuil $\alpha = 1\%$.

   Remarque

   Dans un test d'hypothèse, on peut fixer le risque de .... H_0 alors qu'elle est ...., mais on ne maîtrise pas le risque de .... H_0 alors qu'elle est ....

3. **Règle de décision**

   <u>Rappel du TCL</u>

   Si X suit une loi normale ou si $n \geq 30$:

   $$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma_{\bar{X}}^2) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{X}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{si } n < \frac{N}{20} \text{ (petit échantillon)} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{sinon (grand échantillon)} \end{cases}$$

   D'après le TCL, $\bar{X}$ suit bien une loi normale, car ....

   S'agit-il d'un petit échantillon ou d'un grand échantillon ?

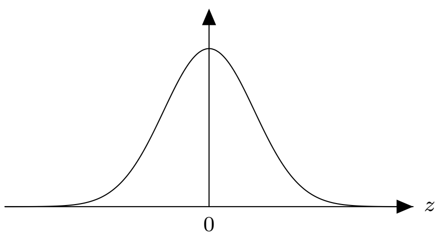
   ....

   Calcul de $\sigma_{\bar{X}}$:

   ....

   Ainsi, **sous l'hypothèse nulle,** $\bar{X} \sim$ ....

   et $Z = \dfrac{\bar{X} - \;\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} \sim$ ....

   On peut donc affirmer que **si l'hypothèse nulle est vraie**, Z a ....% de chances ....

4. **Calcul du score de test et conclusion**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4.2 Exemple 2

Une entreprise produit et vend du sirop d'érable. La machine qui remplit les bouteille est précise à 2 ml, valeur considérée comme l'écart-type des volumes de l'ensemble de la production. Le producteur veut contrôler le réglage de la machine pour s'assurer que le contenu moyen des bouteilles de la production est bien de 500 ml, comme spécifié sur l'étiquette.

Il prélève 100 bouteilles de la production et obtient un volume moyen de 499.2 ml.
Sur la base de ce résultat, le producteur doit-il douter du réglage de sa machine ?

Pour répondre à cette question, on va procéder à un **test d'hypothèse**.

1. **Formulation des hypothèses**

   On pose **l'hypothèse nulle**, qui est l'hypothèse sous laquelle on peut faire des calculs statistiques.

H_0 :	Le volume de remplissage des bouteilles suit une loi d'espérance . . . . ml.

   On pose également **l'hypothèse alternative**

H_1 :	Le volume de remplissage des bouteilles suit une loi d'espérance . . . . ml.

   Remarque

   Comme on teste $\boxed{\mu = 500}$ contre $\boxed{\mu \neq 500}$,
   il s'agit d'un test . . . . (des deux côtés).

2. **Seuil de signification du test**

   Comme dans le cas d'un intervalle de confiance, on doit choisir quel niveau de confiance on souhaite, et quel risque d'erreur on accepte.

   Le **seuil** d'un test statistique représente un risque d'erreur.
   C'est le risque de .... H_0 alors que cette hypothèse est ....
   Posons comme seuil $\alpha = 1\%$.

   Remarque

   Dans un test d'hypothèse, on peut fixer le risque de .... H_0 alors qu'elle est ...., mais on ne maîtrise pas le risque de ....
   H_0 alors qu'elle est ....

3. **Règle de décision**

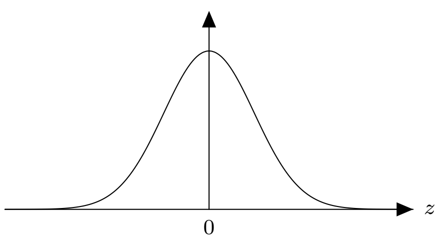
   Rappel du TCL : Si X suit une loi normale ou si $n \geq 30$:

   $$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma_{\bar{X}}^2) \quad \text{avec} \quad \sigma_{\bar{X}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{si } n < \frac{N}{20} \text{ (petit échantillon)} \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} & \text{sinon (grand échantillon)} \end{cases}$$

   D'après le TCL, $\bar{X}$ suit bien une loi normale, car ....
   S'agit-il d'un petit échantillon ou d'un grand échantillon ? ....
   Calcul de $\sigma_{\bar{X}}$:
   ....

   Ainsi, **sous l'hypothèse nulle**, $\bar{X} \sim$ ....

   et $Z = \dfrac{\bar{X} - \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} \sim$ ....



   On peut donc affirmer que **si l'hypothèse nulle est vraie**, Z a ....% de chances de se trouver entre .... et ....

   La règle de décision du test d'hypothèse sera donc :

   Rejeter H_0 si la cote z de la valeur $\bar{x}$ de l'échantillon est .... ou ....

4. **Calcul du score de test et conclusion**

Quels sont les risques de faire ajuster inutilement la machine ? ....

4.3 Exemple 3

On veut tester la durée, en kilomètres, d'un nouveau type de pneus de voiture.

La durée des pneus actuels suit une loi normale d'espérance 50'000 km. Sur 32 nouveaux pneus testés, on obtient une moyenne de 52'311 km, avec un écart-type corrigé de 9'780 km.

Au seuil de signification de 5%, peut-on affirmer que le nouveau type de pneus a une meilleure durée que l'ancien ?

1. **Formulation des hypothèses**

   H_0 : ....

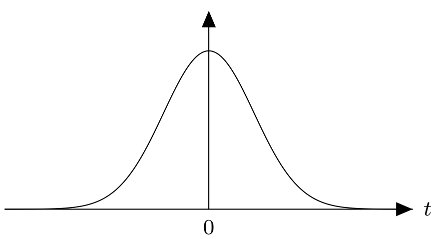
   H_1 : ....

2. **Seuil de signification du test :** $\alpha =$ ....

3. **Règle de décision**

   $\hat{\sigma}_{\bar{X}} =$ ....

   Comme on utilise $\hat{\sigma}$ pour estimer σ, le score de test $T \sim$ ....



$\Rightarrow$ La règle de décision est :

....

4. **Calcul du score de test et conclusion**

Chapitre 5

Inférence statistique

Loi normale

5.1 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.
Associer chaque écriture symbolique à la bonne représentation graphique.

a) $Z = 1.5$

b) $Z \leq 1.5$

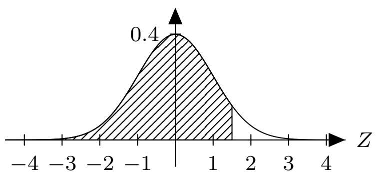
c) $-1 \leq Z \leq 1.5$

d) $P(Z \geq 1.5)$

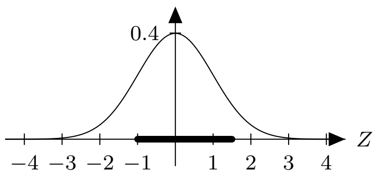
e) $P(Z < 1.5)$

f) $P(-1 \leq Z \leq 1.5)$

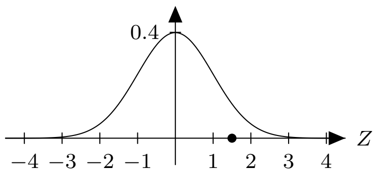
1)



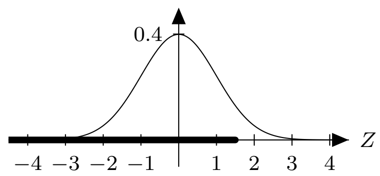
2)



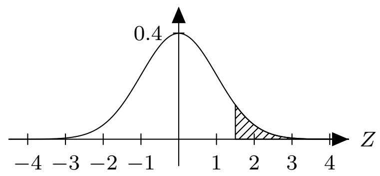
3)



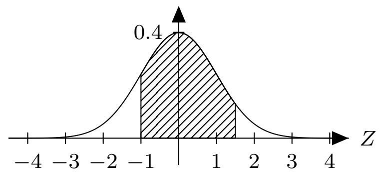
4)



5)

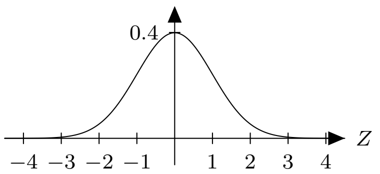


6)

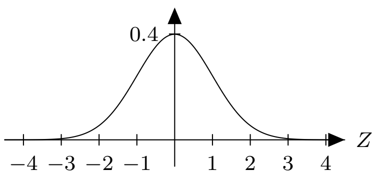


5.2 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.
Traduire chaque écriture symbolique par une représentation graphique sur la courbe de Gauss.

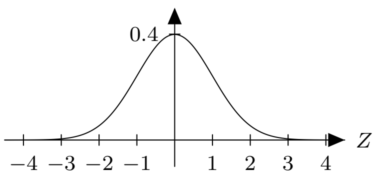
a) $Z = -1$



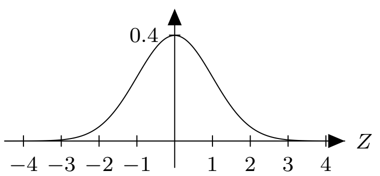
b) $Z > 2$



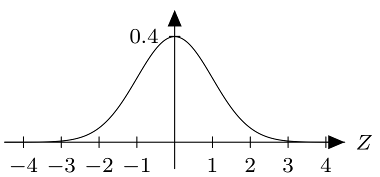
c) $Z < 0$



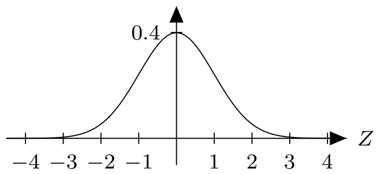
d) $-1 \leq Z \leq 1$



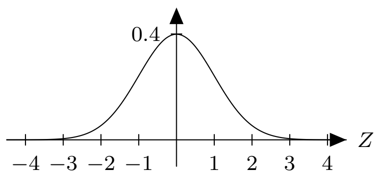
e) $Z \in]-\infty;-1.5[\cup]1;+\infty[$



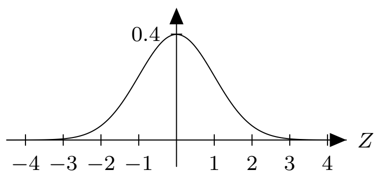
f) $P(Z = -1)$



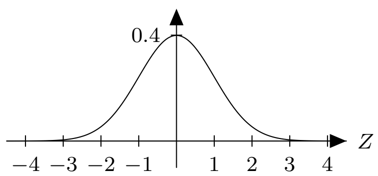
g) $P(Z > 2)$



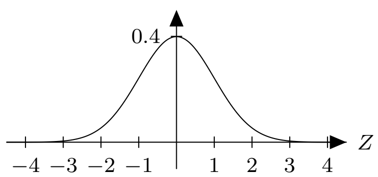
h) $P(Z < 0)$



i) $P(-1 \leq Z \leq 1)$

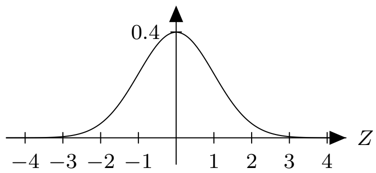


j) $P\left(Z \in]-\infty;-1.5[\cup]1;+\infty[\right)$



5.3 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. On sait que $P(Z > 1) \cong 15.87\%$.

a) Représenter cette probabilité sur la courbe de Gauss.



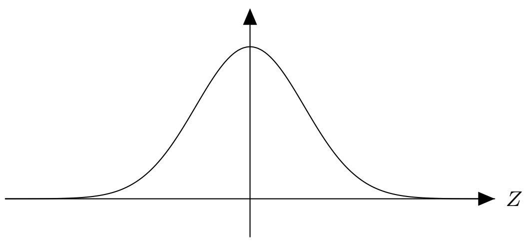
b) En déduire les probabilités suivantes, en s'aidant si nécessaire d'un schéma :

1) La probabilité que Z prenne une valeur inférieure à -1 :
$P(Z < -1) \cong$
2) La probabilité que Z prenne une valeur supérieure à -1 :
$P(Z > -1) \cong$
3) La probabilité que Z prenne une valeur située entre -1 et 1 :
$P(-1 < Z < 1) \cong$
4) La probabilité que Z prenne une valeur située entre 0 et 1 :
$P(0 < Z < 1) \cong$
5) La probabilité que la valeur de Z soit située à plus de 1 de la valeur 0 :
$P(|Z| > 1) = P\left(Z \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\right) \cong$

5.4 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.
Utiliser la table de la loi normale pour estimer les probabilités suivantes.

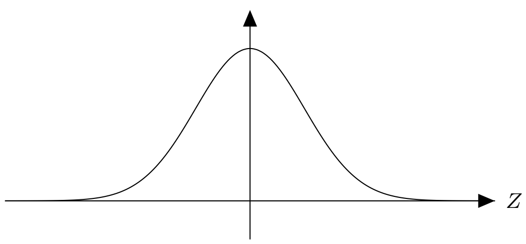
a) $P(Z = 0.5)$
b) $P(Z > 1.25)$
c) $P(Z > 2.5)$
d) $P(Z < 2.5)$
e) $P(Z < -2.33)$
f) $P(Z > -1.25)$
g) $P(-2.33 < Z < 1.25)$
h) $P(1.25 < Z < 2.5)$
i) $P(-0.5 < Z < 0)$
j) $P(|Z| < 2.5)$
k) $P(|Z| > 0.5)$
l) $P\left(Z \in]-\infty; 0[\cup]0.5; +\infty[\right)$

5.5 On considère une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.
Représenter graphiquement chaque situation, puis en utilisant la table de la loi normale, déterminer la valeur de a, b, c, d, e et f.



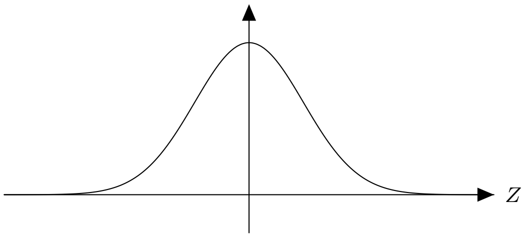
$P(Z > a) = 10\%$

$\Rightarrow a =$



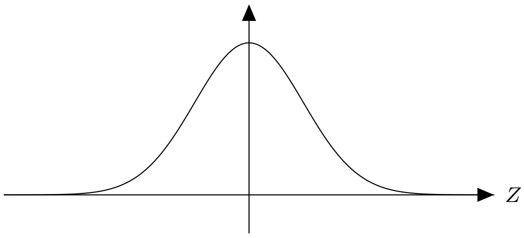
$P(Z > b) = 1\%$

$\Rightarrow b =$



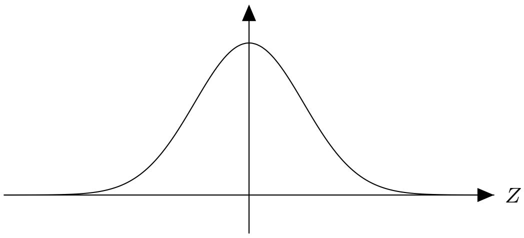
$P(|Z| > c) = 10\%$

$\Rightarrow c =$



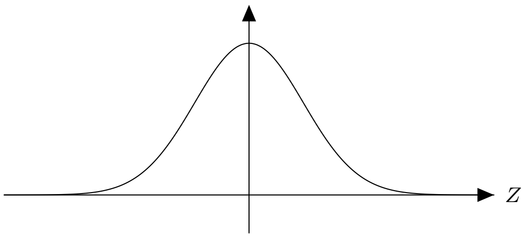
$P(|Z| > d) = 1\%$

$\Rightarrow d =$



$P(-e < Z < e) = 95\%$

$\Rightarrow e =$



$P(-f < Z < f) = 99.9\%$

$\Rightarrow f =$

5.6 Calculer les probabilités en utilisant la table.

a) $P(X > 60)$ avec $X \sim \mathcal{N}(50; 16)$

b) $P(X \geq 3.9)$ avec $X \sim \mathcal{N}(4; 0.09)$

c) $P(X < 325)$ avec $X \sim \mathcal{N}(500; 10'000)$

d) $P(-1 < X < 2)$ avec $X \sim \mathcal{N}(1.5; 4)$

e) $P(20 < X < 28)$ avec $X \sim \mathcal{N}(24; 25)$

f) $P(|X| > 1)$ avec $X \sim \mathcal{N}(0; 10)$

5.7 Déterminer, dans chaque cas, la valeur de c.

a) $X \sim \mathcal{N}(0; 9)$ et $P(X \geq c) = 10\%$

b) $X \sim \mathcal{N}(5; 1)$ et $P(X \leq c) = 30\%$

c) $X \sim \mathcal{N}(100; 100)$ et $P(X > c) = 80\%$

d) $X \sim \mathcal{N}(-6; 4)$ et $P(X < c) = 95\%$

e) $X \sim \mathcal{N}(0; 16)$ et $P(|X| \geq c) = 1\%$

f) $X \sim \mathcal{N}(0; 20)$ et $P(-c < X < c) = 97\%$

5.8 Dans un hôpital, on suppose que l'âge du personnel infirmier suit un modèle normal, de moyenne 42 ans et d'écart-type 7 ans.

a) Quel pourcentage du personnel infirmier a moins de 30 ans ?

b) Quel pourcentage du personnel infirmier a entre 39 et 56 ans ?

c) Quel âge a Nicole, infirmière dans cet hôpital, si l'on sait que seulement 20% du personnel infirmier est plus âgé qu'elle ?

5.9 La durée de vie, en heures, des piles produites par un fabriquant se distribue selon un modèle normal : $X \sim \mathcal{N}(110; 100)$.

a) Quelle est la probabilité qu'une pile dure plus de 125 heures ?

b) Quelle est la probabilité qu'une pile dure entre 95 et 125 heures ?

c) La garantie stipule que si la pile ne dure pas assez longtemps, le fabriquant s'engage à la remplacer gratuitement. A combien d'heures doit-il fixer le seuil de durée garantie pour ne remplacer que 5% des piles vendues ?

5.10 Louis prend tous les jours le train pour venir au Gymnase. En moyenne, il met 16 minutes pour faire le trajet entre chez lui et la gare, avec un écart-type de 3 minutes. On suppose que la distribution du temps de trajet suit un modèle normal.

a) Si Louis part de chez lui à 7h15 alors que le train part à 7h35, quelle est la probabilité qu'il manque son train ?

b) A quelle heure Louis doit-il partir de chez lui pour que la probabilité qu'il manque son train soit réduite à 1% ?

5.11 On suppose que la distribution du quotient intellectuel (QI) suit un modèle normal : $X \sim \mathcal{N}(100; 225)$.

a) Quel pourcentage de la population a un QI compris entre 92 et 108 ?

b) On dit qu'une personne souffre de déficience mentale si son QI est inférieur à 70. Quelle proportion de la population devrait donc souffrir de déficience mentale ?

c) Julien prétend que 80% de la population a un QI inférieur au sien. Quelle devrait être la valeur de son QI ?

5.12 Dans une université, les examens d'admission en médecine sont notés au dixième sur une échelle de 1 à 6. On suppose que la distribution des résultats suit un modèle normal de moyenne 4.12 et d'écart-type 2.7.

a) Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard ait une note supérieure à 5 ?

b) Si l'université n'admet que 33% des candidats, à quelle note doit-elle fixer le seuil pour choisir les candidats admis ?

5.13 Le tableau suivant donne la répartition de 500 garçons de 3 ans en fonction de leur taille.

Taille en cm	**Nombre de garçons**	**Fréquence (%)**
< 90	22	
[90 ; 92[	47	
[92 ; 94[	84	
[94 ; 96[	113	
[96 ; 98[	109	
[98 ; 100[	75	
[100 ; 102[	35	
≥ 102	15	
Total	**500**	

a) Compléter la dernière colonne du tableau.

b) Représenter les données par un histogramme en pourcentage.

c) Calculer la moyenne, la médiane, la variance et l'écart-type de cet échantillon.

d) D'après la forme de l'histogramme et les valeurs calculées, quel modèle peut-on utiliser pour décrire la taille d'un enfant de 3 ans ?

e) Utiliser ce modèle pour calculer la probabilité qu'un enfant mesure plus de 97 cm.

f) D'après ce modèle, combien mesure au maximum un enfant de 3 ans faisant partie des 10% les plus petits ?

Théorème central limite

5.14 Le revenu annuel moyen des 3'000 médecins d'une région est de 200'000 francs, avec un écart-type de 20'000 francs.
On prélève un échantillon aléatoire de 100 médecins parmi ces 3'000 médecins.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des revenus de ces 100 médecins suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que le revenu moyen de ces 100 médecins vaille exactement 200'000 francs ?

d) Quelle est la probabilité que le revenu moyen de ces 100 médecins soit compris entre 195'000 francs et 205'000 francs ?

e) Quelle est la probabilité qu'il y ait un écart d'au moins 2'000 francs entre le revenu moyen de ces 100 médecins et celui des 3'000 médecins de cette région ?

5.15 Une entreprise fabrique des câbles d'acier.
On désire vérifier si le diamètre X des câbles est conforme aux normes, à savoir une distribution normale de moyenne 0.90 cm et un écart-type de 0.06 cm. Pour ce faire, on prélève au hasard dans la production 36 câbles dont on mesure le diamètre.

a) Pourquoi peut-on considérer que le diamètre moyen de ces 36 câbles suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) On obtient un diamètre moyen de 0.88 cm pour ces 36 câbles. Calculer la probabilité d'obtenir un résultat au moins aussi éloigné des 0.90 cm théoriques.

d) D'après le résultat précédent, diriez-vous que les câbles de cette entreprises sont conformes aux normes ?

5.16 La moyenne d'âge des 200 travailleurs d'une usine est de 38.2 ans, avec un écart-type de 5.4 ans. On suppose que la distribution de l'âge des travailleurs de cette usine suit un modèle normal.
On prélève dans cette population un échantillon aléatoire de 25 travailleurs.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne d'âge de ces 25 travailleurs suit une loi normale ?

b) Calculer les paramètres de cette loi normale.

c) Quelle est la probabilité que la moyenne d'âge des 25 travailleurs se situe entre 35 et 40 ans ?

d) Si l'on néglige les valeurs extrêmes ayant moins de 1% de chances d'être obtenues, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne d'âge de ces 25 travailleurs ?

5.17 La moyenne d'âge des femmes ayant donné naissance à un enfant en Suisse en 2015 était de 32 ans avec un écart-type de 5 ans.
On prélève un échantillon aléatoire de 100 femmes ayant donné naissance à un enfant en Suisse en 2015, et on leur pose la question suivante : *Quel âge aviez-vous à la naissance de votre enfant ?*

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des réponses des 100 femmes suit une loi normale ?
b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
c) Si l'on néglige les valeurs extrêmes ayant moins de 5% de chances d'être obtenues, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne des réponses des 100 femmes ?
d) L'âge moyen de ces 100 femmes à la naissance de leur enfant est de 33.7 ans. Doit-on s'étonner d'obtenir un résultat aussi éloigné de la moyenne en Suisse ? Justifier par un calcul de probabilités.

5.18 Dans un gymnase, 115 élèves de l'école de culture générale ont passé leur examen de mathématiques. On a pu observer que la note de chaque élève suit une loi normale : $X \sim \mathcal{N}(4.1\,;\,1.8225)$.
Un enseignant souhaite déterminer si les élèves de sa classe ont mieux réussi que l'ensemble des élèves du gymnase.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des notes obtenues par les 22 élèves de cette classe suit une loi normale ?
b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
c) Quelle est la probabilité que la moyenne des notes des élèves de cette classe soit comprise entre 3.5 et 4.5 ?
d) L'enseignant calcule que la moyenne des notes des élèves de sa classe est de 4.6. Peut-il en déduire que sa classe a particulièrement bien réussi l'examen ? Justifier par un calcul de probabilités.

5.19 En 2015, 67'606 personnes sont décédées en Suisse. L'âge moyen au moment du décès est de 79.6 ans avec un écart-type de 15.02 ans.
On prélève au hasard 500 personnes décédées en Suisse en 2015.

a) Pourquoi peut-on considérer que la moyenne des âges de ces 500 personnes au moment du décès suit une loi normale ?
b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
c) Quelle est la probabilité que la moyenne d'âge de ces 500 personnes au moment du décès soit inférieure à 80 ans ?
d) Quelle est la probabilité que l'écart entre la moyenne d'âge de ces 500 personnes et celle de toutes les personnes décédées en 2015 soit inférieur à 1 ans ?
e) Si l'on considère uniquement les 99.5% des valeurs les plus proches de la moyenne suisse, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne d'âge de ces 500 personnes ?

5.20 Vous décidez de tenter votre chance au casino en jouant à la roulette américaine. Cette roulette comporte 38 cases : les cases 1 à 36, le zéro et le double zéro.

Vous décidez de miser à chaque fois 1 franc sur "impair". Si la bille tombe sur une case impaire, le casino vous reverse 2 francs. Si la bille tombe sur une case paire, ou sur le zéro ou le double zéro, vous perdez votre mise.

On peut calculer qu'en moyenne, votre gain à chaque partie sera de -5.3 centimes (il s'agit donc d'une perte !) avec un écart-type de 99.86 centimes.

a) Si vous jouez 50 parties, pourquoi peut-on considérer que votre gain moyen par partie (sur l'ensemble des parties de la soirée) suit une loi normale ?
b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
c) Quelle est la probabilité qu'à la fin de la soirée, vous repartiez en ayant gagné quelque chose ?
d) Quelle est la probabilité qu'à la fin de la soirée, vous ayez gagné au total plus de 10 francs ?
e) Si vous ne faites pas partie du 1% des joueurs les plus malchanceux, combien d'argent aurez-vous perdu au maximum durant cette soirée ?

5.21 Un gymnase compte 1500 élèves. On a pu mesurer que la moyenne des dépenses hebdomadaires à la cafétéria était de 17.30 avec un écart-type de 8.90.
Durant la semaine spéciale, 450 élèves partent en voyage d'études, et ne consomment donc rien à la cafétéria. Le gérant de la cafétéria souhaite estimer la perte que cela représente pour lui.

a) Pourquoi peut-on considérer que le montant moyen qu'auraient dépensés les 450 élèves absents suit une loi normale ?
b) Calculer les paramètres de cette loi normale.
c) Quelle est la probabilité que ce montant moyen soit supérieur à 18 francs par élève ?
d) Si l'on néglige le 1% des valeurs les plus hautes, à combien au maximum doit s'élever le montant moyen qu'auraient dépensés ces élèves ?

   A combien s'élève donc, dans le pire cas, la perte totale pour le gérant ?

Intervalles de confiance

5.22 On sait que le poids des contenants remplis par une machine obéit à une loi normale dont l'écart-type σ est 0.7 gramme.
Pour un échantillon aléatoire de 100 contenants prélevés dans la production de cette machine, on obtient un poids moyen de 49.7 grammes.

a) Construire un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%, permettant d'estimer le poids moyen de tous les contenants remplis par la machine.
Interpréter l'intervalle.

b) Donner et interpréter le risque d'erreur.

c) Donner et interpréter la marge d'erreur.

5.23 On construit un intervalle de confiance pour estimer μ à l'aide d'un échantillon de taille 50.

a) Donner la cote Z à utiliser pour obtenir les niveaux de confiance suivants :
i) 80 % ii) 93 % iii) 97 %

b) Lequel de ces trois niveaux de confiance donnera :
i) la plus petite marge d'erreur ? ii) le plus grand risque d'erreur ?

5.24 Afin de pallier un problème de surcharge de réseau dû aux appels interurbains le jour de la fête des Mères, on désire estimer la durée moyenne de ces appels.
Un échantillon aléatoire de 36 appels a donné une moyenne de 5.3 minutes et un écart-type corrigé de 3.5 minutes.

a) Construire un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% pour estimer la durée moyenne des appels interurbains ce jour-là.

b) Présenter les résultats obtenus sous a) en complétant le graphique suivant :

Population

$X=$ ________
____ % de chance que :
____ $\leq \mu \leq$ ____
$\sigma =$ ____
$N =$ ____

$\leftarrow$

Echantillon

$\bar{x} =$ ____
$\hat{\sigma} =$ ____
$n =$ ____

c) L'article suivant présente le sondage. Le compléter.

Selon une étude effectuée par sondage, la durée moyenne des appels interurbains le jour de la fête des Mères est de ____ minutes.

Méthodologie
Ce sondage a été mené à partir d'un échantillon de ____ appels interurbains effectuées le jour de la fête des Mères. Avec un échantillon de cette taille, la marge d'erreur est de ____ minutes, ____ fois sur 20.

5.25

a) Utiliser l'information contenue dans le graphique suivant pour estimer μ par intervalle de confiance.

Population		Echantillon
X= volume		
90 % de chance que :		$\bar{x} = 455$ ml
____ $\leq \mu \leq$ ____	$\leftarrow$	$\hat{\sigma} = 8.5$ ml
$\sigma =$ inconnu		$n = 200$
$N = 1000$		

b) Compléter l'énoncé : Il y a ____ de chances que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et la moyenne de la population soit inférieur à ____.

c) Quel type d'estimation utilise-t-on si on pose :
i) $\mu = 455$ ml ? ii) $454.1 \text{ ml} \leq \mu \leq 455.9$ ml ?

d) En négligeant les moyennes $\bar{x}$ ayant moins de 0.3% de chances d'être obtenues, quelle est la plus grande marge d'erreur possible entre μ et $\bar{x}$?
Pourquoi n'utilise-t-on pas cette marge d'erreur pour estimer μ ?

5.26 Une équipe de chercheurs suit le développement de jeunes enfants depuis leur naissance afin d'établir une courbe de croissance indiquant la distribution de leur taille et de leur poids selon l'âge. Voici le tableau de distribution du poids des 500 filles de l'échantillon, à l'âge de trois ans.

Répartition de 500 filles de 3 ans selon le poids

Poids en kg	Nombre de filles
$[11; 12[$	45
$[12; 13[$	80
$[13; 14[$	140
$[14; 15[$	125
$[15; 16[$	70
$[16; 17[$	40
Total	**500**

a) Estimer par intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% le poids moyen des filles de 3 ans

b) Dans ce cas-ci, l'estimation ponctuelle serait-elle acceptable ? Jusitifier la réponse.

5.27

a) Si on augmente le niveau de confiance de 90% à 99%, la marge d'erreur dans l'estimation de μ sera-t-elle plus grande ou plus petite ?

b) Si on augmente la taille de l'échantillon tout en gardant le même niveau de confiance, la marge d'erreur dans l'estimation de μ sera-t-elle plus grande ou plus petite ?

5.28 Calculer la taille minimale de l'échantillon à prélever pour estimer le poids moyen de sacs de sucre remplis par une machine, avec une marge d'erreur d'au plus 0.03 kg, en utilisant un intervalle de confiance au niveau de 99%.

On considère que la distribution du poids des sacs obéit à une loi normale dont l'écart type est de 0.1 kg.

5.29 Calculer la taille minimale de l'échantillon à prélever pour estimer à 500 francs près le revenu familial moyen des familles d'un quartier, avec un niveau de confiance de 95%, si on estime l'écart-type des revenus à 3500 francs.

Tests d'hypothèse

5.30 En 2005, les adolescents québécois âgés de 12 à 17 ans consacrent en moyenne 9.5 heures par semaine à l'écoute de la radio. En 2012, un chercheur émet l'hypothèse que l'arrivée des baladeurs numériques et des services de musique en ligne a entraîné une diminution du temps d'écoute de la radio chez les adolescents.

Pour vérifier son hypothèse, il prélève un échantillon aléatoire de 64 adolescents et il établit que ces derniers consacrent en moyenne 8.3 heures par semaine à l'écoute de la radio, avec un écart-type corrigé de 4.2 heures.

a) La moyenne échantillonnale confirme-t-elle l'hypothèse du chercheur ?
Effectuer une test d'hypothèse au seuil de signification de 0.05.
b) À combien peut-on estimer les risques que la conclusion du test soit fausse ?
c) C'est l'hypothèse ____ qui indique le type de test (unilaéral à droite ou à gauche, ou bilatéral) qu'il faut effectuer.
d) C'est l'hypothèse ____ qui donne la moyenne de la courbe normale utilisée pour représenter la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$.

5.31 On veut tester l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 100$.
Pour ce faire, on prélève un échantillon aléatoire de taille 36 dans la population. Supposons que l'on obtienne l'une des trois valeurs ci-dessous comme moyenne échantillonale.

En sachant que $\sigma = 12$ et considérant la position de chacune des valeurs sur la distribution d'échantillonnage de $\bar{X}$, indiquer la valeur qui nécessiterait la construction d'un test d'hypothèse pour décider du rejet ou du non-rejet de l'hypothèse nulle.
Jusitfier votre choix.

$\bar{x} = 93.3$ $\qquad\qquad$ $\bar{x} = 101.3$ $\qquad\qquad$ $\bar{x} = 104.6$

5.32

a) Quelle est l'hypothèse testée par un test d'hypothèse : H_0 ou H_1 ?

b) Lequel des quatre énoncés suivants définit le seuil de signification ?
   - Le point à partir duquel on décide de rejeter H_0.
   - La zone de rejet de H_0 : si $\bar{x}$ est dans cette région, on doit rejeter H_0.
   - La probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 alors que cette hypothèse est vraie.
   - La probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 alors que cette hypothèse est fausse.

c) Commenter l'affirmation suivante :
Lorsqu'on prend la décision de ne pas rejeter l'hypothèse H_0, cela constitue une preuve que cette hypothèse est vraie.

5.33 Formuler les hypothèses H_0 et H_1 pour les situations suivantes, en précisant à chaque fois si l'on effectuera un test unilatéral ou bilatéral.

a) Un fabriquant examine un échantillon de 30 bouteilles remplies par une machine afin de vérifier si celle-ci verse bien, en moyenne, 500 ml de jus par bouteille.

b) Un chercheur émet l'hypothèse que la durée de séjour des touristes dans les hôtels a augmenté à Québec en 2013 par rapport à 2012, où l'on avait observé une moyenne de 2.7 nuitées par personne.

c) La longueur moyenne d'une tige fabriquée par une machine doit être de 35 mm ; on veut vérifier le réglage de la machine.

d) Une machine produit des articles dont le diamètre doit être de 6.25 cm. Si le diamètre moyen d'un lot est inférieur à 6.25 cm, le lot doit être détruit. Par contre, si le diamètre moyen est supérieur à 6.25 cm, les articles pourront tout de même être vendus au même prix (mais pour un usage différent).
On veut vérifier le diamètre moyen des articles.

e) Un chercheur émet l'hypothèse que l'absentéisme des femmes au travail est moindre quand il y a une garderie sur les lieux du travail.
En moyenne, le nombre de jours d'absence des travailleuses du Québec est de 4.4 journées par année.

5.34 Une machine remplit des sacs de sucre de façon telle que le poids de ceux-ci est, en moyenne, de 5 kg avec un écart type de 0.18 kg.

a) On prélève régulièrement un échantillon aléatoire de 50 sacs de sucre dans la production afin de surveiller le réglage de la machine.
Construire une règle de décision, précise au centième près, permettant de s'assurer que les sacs contiennent bien, en moyenne, 5 kg de sucre. Utiliser un seuil de signification de 0.05.

b) Les tableaux suivants donnent, pour les 6 derniers échantillons prélevés, le poids moyen des 50 sacs de sucre de chaque échantillon.
Y a-t-il un échantillon qui indique que la machine était mal ajustée au moment du prélèvement ?

Lundi			**Mardi**		
10h	13h	16h	10h	13h	16h
$\bar{x} = 5.06$ kg	$\bar{x} = 4.98$ kg	$\bar{x} = 4.97$ kg	$\bar{x} = 5.02$ kg	$\bar{x} = 4.96$ kg	$\bar{x} = 4.94$ kg

c) Expliquer ce que signifie un seuil de signification de 0.05 dans le contexte du problème

5.35 Afin d'améliorer le service à la clientèle, une entreprise a informatisé la gestion des stocks.
Avant l'informatisation, le temps nécessaire pour répondre à la demande d'un client suivait une loi normale dont la moyenne était de 8.3 minutes et l'écart type de 3.2 minutes.
À la suite de l'informatisation, un échantillon aléatoire de 25 clients a donné les temps de service suivants, en minutes :

7	9	6	6	3	6	5	7	7	8	10	9	4	3	6	5	7	8	8	3	4	4	6	5	4

Peut-on en conclure, au seuil de signification de 1% que l'informatisation a permis d'accélérer le service à la clientèle ?

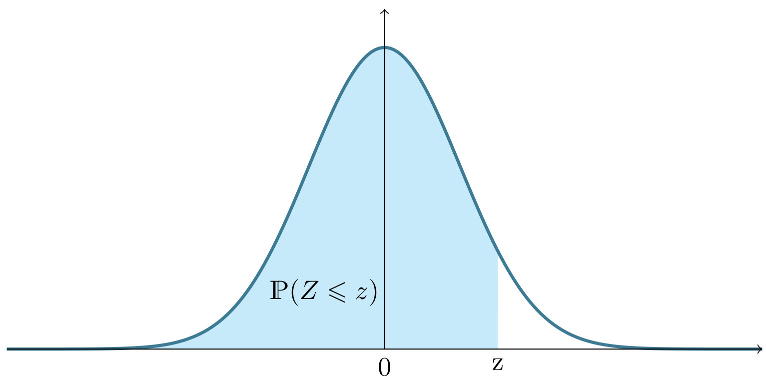
5.36 La durée de vie moyenne des tubes fluorescents fabriqués par une entreprise est estimée à 1000 heures. Les techniciens tentent d'améliorer la durée de vie en modifiant la composition du gaz. Un test préliminaire montre que, pour un échantillon de 100 tubes, fluorescents modifiés, la durée de vie moyenne est de 1050 heures.

a) Si l'écart-type corrigé de l'échantillon est de 168 heures, au seuil de signification de 0.01, peut-on en conclure que les néons modifiés durent plus longtemps ?

b) Estimer les risques que la durée de vie moyenne des tubes fluorescents soit toujours de 1000 heures, et donc que la modification du gaz n'a eu aucun effet.

c) La conclusion serait-elle la même si la moyenne de l'échantillon était de 1025 heures ? Peut-on conclure que cela prouve que la durée de vie moyenne réelle des tubes fluorescents produits est bien de 1000 heures ?

Loi normale centrée réduite : $\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leqslant z)$, où $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998