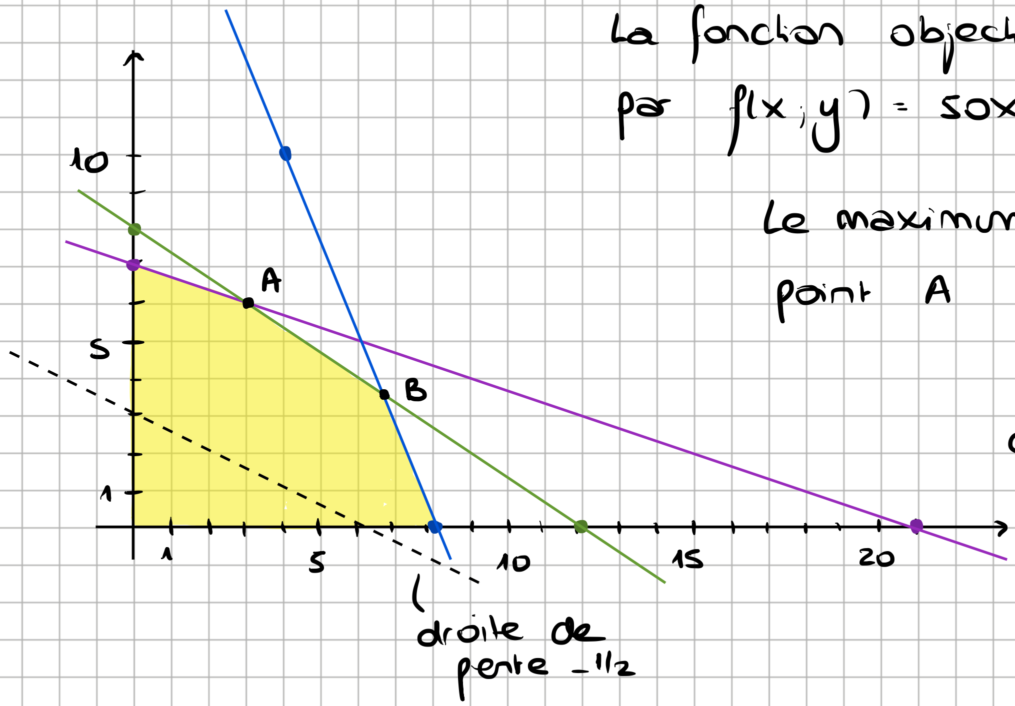
Problème 1

a) Appelons x le nombre de recettes 1 et y le nombre de recettes 2.

Les contraintes sont données par le système

$$\begin{cases} x + 3y \leq 21 & (0;7),\ (21;0) \\ 2x + 3y \leq 24 & (12;0),\ (0;8) \\ 5x + 2y \leq 40 & (8;0),\ (4;10) \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$



La fonction objectif est donnée par $f(x;y) = 50x + 100y$, $m = -\frac{1}{2}$

Le maximum est atteint au point A $\begin{cases} x + 3y = 21 \\ 2x + 3y = 24 \end{cases}$

donc $x = 3$ et $y = 6$

$A(3;6)$.

Igor doit donc réaliser trois fois la première recette et six fois la seconde.

b) Son profit sera alors de $50 \cdot 3 + 100 \cdot 6 = 750.-$

c) Son capital est donné par $C(t) = 750 \cdot (1+i)^{20}$

On cherche i tel que $1010 = 750(1+i)^{20}$ donc

$(1+i)^{20} = \frac{1010}{750}$ donc $1 + i = \sqrt[20]{\frac{1010}{750}}$ $\Rightarrow i \cong 1{,}5\%$.

Problème 2

(A) a) $7! = 5040$

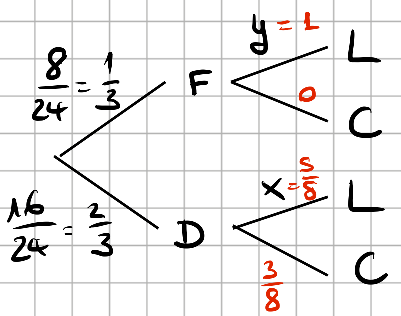
b) On groupe les 2 restaurants : $6! \cdot 2 = 1440$

c) $\underbrace{C_1^2}_{\text{choix du restaurant de raclette}} \cdot C_4^5 \cdot 5! = 1200$

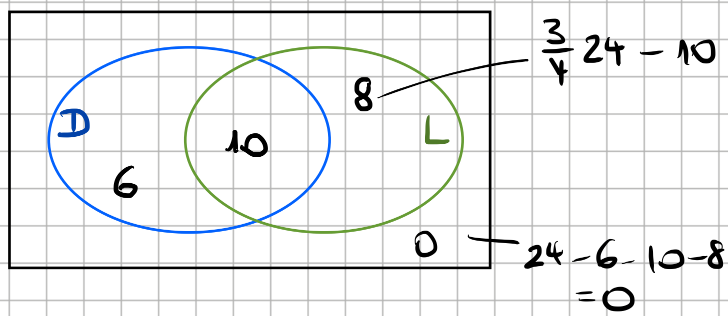
choix des autres restaurants

répartition des restaurants choisis

(B) Posons F = "piste facile", L = "piste longue"
D = "piste difficile", C = "piste courte"



ou



On a $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{10}{24}$ donc $x = \frac{5}{8}$ et $\frac{10}{24} + \frac{1}{3} \cdot y = \frac{18}{24}$

donc $y = \frac{8}{8} = 1 = 100\%$.

d) $p(F) = \frac{1}{3} \cong 33{,}33\%$

e) $p(F \cap C) = 0 = 0\%$

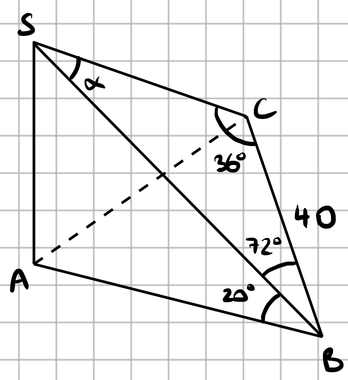
f) $p(D \mid L) = \frac{p(D \cap L)}{p(L)} = \frac{10/24}{18/24} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \cong 55{,}56\%$.

g)

X	1	3
P(X = x)	1/4	3/4

$E(X) = \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{10}{4} =$
$= \frac{5}{2} = 2{,}5\,\text{km}$

Problème 3



a) Posons $\alpha = \widehat{BSC}$, alors par le thm du sinus dans le ΔBSC, on a

$$\frac{BS}{\sin(36^\circ)} = \frac{40}{\sin(\underbrace{180^\circ - 36^\circ - 72^\circ}_{72^\circ})}$$

donc $BS \cong 24{,}72\ m$.

b) Il faut d'abord déterminer AS. Comme le ΔABS est rectangle en A, on a

$$\sin(20^\circ) = \frac{AS}{24{,}72} \quad \text{donc} \quad AS \cong 8{,}46\ m.$$

La hauteur de l'immeuble sera donc de $8{,}46 + 60 =$
$= 68{,}46\ m$.

c) $V = \frac{1}{3} A_{ABC} \cdot AS$. Le ΔABC est rectangle

donc $A_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$.

On a $\cos(20^\circ) = \dfrac{AB}{24{,}72}$ donc $AB \cong 23{,}23\ m$ et

$AC = \sqrt{40^2 - 23{,}23^2} \cong 32{,}56\ m$.

Ainsi $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 23{,}23 \cdot 32{,}56 \cdot 8{,}46 \cong 1066{,}48\ m^3$.

d) La surface est donnée par

$$S = \underbrace{A_{ABS}}_{\substack{\frac{1}{2} 23{,}23 \cdot 8{,}46 \\ \cong 98{,}26\ m^2}} + A_{BSC} + \underbrace{A_{ACS}}_{\substack{\frac{1}{2} 32{,}56 \cdot 8{,}46 \\ \cong 137{,}73\ m^2}}$$

$A_{BSC} = \frac{1}{2} 40 \cdot 24{,}72 \cdot \sin(72^\circ) \cong 470{,}20\ m^2$

Donc $S \cong 706{,}19\ m^2$.

Probleme 4

A. Appelons x le nombre de semaines qu'il attend.
Le bénéfice est alors donné par la fonction

$$f(x) = \underbrace{(1600 + 100x)}_{\text{nombre de kg de pommes}} \cdot \underbrace{(40 - 2x)}_{\text{prix par kg}} =$$

$$= 64000 + 4000x - 3200x - 200x^2 =$$

$$= -200x^2 + 800x + 64000$$

Ce bénéfice sera donc maximal si $x = \dfrac{-800}{-400} = 2$.
Il faut donc attendre deux semaines et le bénéfice sera alors de $f(2) = -800 + 1600 + 64000 = 64800 = 648$ fr.

B. Il y en a $P_6(2, 3, 1) = \dfrac{6!}{2!\cdot 3!} = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$.
Si le numéro est pair, il doit se terminer par 4 ou 6.
Il y en a $P_5(2, 2, 1) = \dfrac{5!}{2!2!} = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ qui se terminent par 4 et $P_5(3, 2) = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = 5 \cdot 2 = 10$ qui se terminent par 6.
Donc, au total, 40 sont pairs.

On peut également compter les numéros impairs, donc qui se terminent par 3. Il y en a $P_5(1, 3, 1) =$
$= \dfrac{5!}{3!} = 20$ donc $60 - 20 = 40$ numéros pairs.

C. a) $f(100) = 20 \cdot 2^{-4} = 1,25$ mg.

b) On cherche t tel que $20 \cdot 2^{-t/25} = 1$ donc

$$2^{-t/25} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow -\frac{t}{25} = \frac{\log(1/20)}{\log(2)} \Leftrightarrow t = -25\frac{\log(1/20)}{\log(2)} \cong$$

$\cong 108,05$ donc 108 ans et 17 jours environ.

Problème 5

(A)

a) V.S. = autonomie des voitures électriques

Variable quantitative continue

b)

Autonomie	Effectif	f_i	F_i
$[0;200[$	3	0,12	0,12
$[200;400[$	7	0,28	0,4
$[400;600[$	12	0,48	0,88
$[600;800[$	2	0,08	0,96
$[800;1000[$	1	0,04	1
Total :	25		

c) $\bar{x} = \sum x_i f_i = 428$, $s^2 = \sum f_i (x_i - \bar{x})^2 = 34816$

$s = 186,59$ km

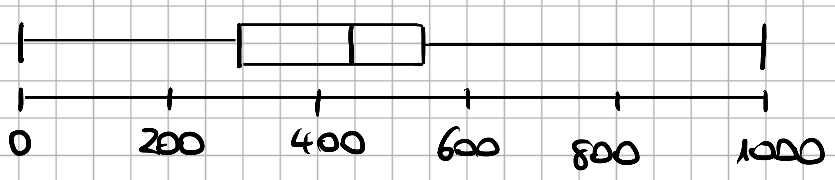
d) $\tilde{x} = Q_2 = 400 + 200 \cdot \dfrac{0,5 - 0,4}{0,48} \cong 441,67$ km

$Q_1 = 200 + 200 \cdot \dfrac{0,25 - 0,12}{0,28} \cong 292,86$ km

On sait que $Q_3 = 545,83$ km.

e)

Boxplot :



bother ?

(B) $\mu = 10'000$ km, $\sigma = 2'000$ km.

f) On a $n = 1000 \geq 30$, $N = 162000$, $\dfrac{N}{20} = 8100 > n$

donc il s'agit d'un petit échantillon.

Par le TCL, $\bar{x} \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma_{\bar{x}}^2)$ où $\mu = 10'000$

et $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{2000}{\sqrt{1000}} = 20\sqrt{10} \cong 63,25$ km.

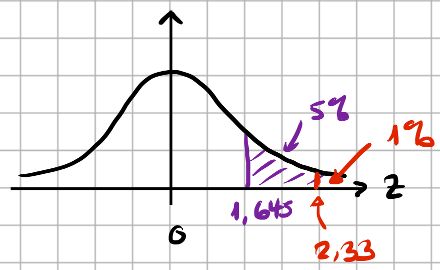
g) $P(\bar{X} > 10'200) = P\left(Z > \dfrac{10'200 - 10'000}{63,25}\right) =$

$= P(Z > 3,16) = 1 - \underbrace{P(Z \leq 3,16)}_{0,9992} = 0,0008 = 0,08\,\%$

h) On peut effectuer un test d'hypothèse

H_0 : L'autonomie suit une loi de moyenne $\mu = 10'000$ km.

H_1 : $\mu > 10'000$ km.



Avec un seuil à 5% :

$q_{0,95} = 1,645$

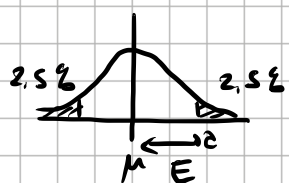
Avec un seuil à 1% : $q_{0,99} = 2,33$.

Score du test : $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{10'180 - 10'000}{63,25} \cong 2,84$

Ce score est nettement plus grand que 1,645. Il est également plus grand que 2,33.

Il faut donc rejeter H_0 : les véhicules équipés de boîtiers ont donc significativement plus roulé.

[Avec un intervalle de confiance :



$E = \underbrace{q_{0,975}}_{=1,96} \cdot \sigma_{\bar{x}} \cong 123,96$

$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 63,25$

(Car $P(X \leq a) = 97,5\%$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a - \bar{x}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 97,5\%$

$\Leftrightarrow \dfrac{a - \bar{x}}{\sigma_{\bar{x}}} = q_{0,975}$

donc $E = q_{0,975} \cdot \sigma_{\bar{x}}$)

Intervalle de confiance à 95%

$\mu \in [\bar{x} - E ; \bar{x} + E] = [10'056 ; 10'301]$ qui ne contient pas 10'180

]

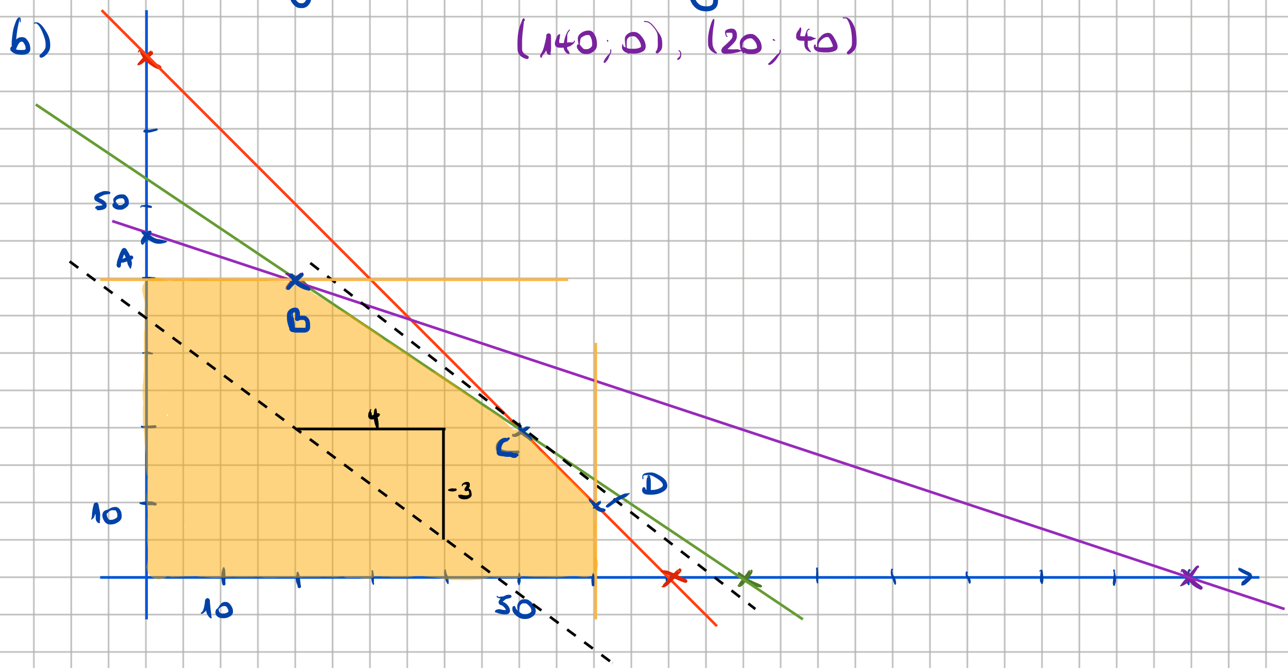
Ex 1 (PL)

a) Posons x = nombre d'avions et y = nombre de bateaux.

Les contraintes sont alors

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 60 \\ 0 \leq y \leq 40 \\ 3x + 3y \leq 210 \iff x + y \leq 70 \\ 2x + 3y \leq 160 \quad (80;0),\ (20;40) \\ 2x + 6y \leq 280 \iff x + 3y \leq 140 \quad (140;0),\ (20;40) \end{cases}$$

b)



c) Le fonction économique est donnée par $f(x;y) = 30x + 40y$. On représente donc une droite de pente $-\frac{30}{40} = -\frac{3}{4}$.

La valeur maximale est atteinte en C : $\begin{cases} x + y = 70 \\ 2x + 3y = 160 \end{cases}$

donc $2(70-y) + 3y = 160 \iff y = 20$ et $x = 50$.

Il faut donc fabriquer 50 avions et 20 bateaux.

Ex. 2

a) $h = 150$ cm. C'est la taille d'Albert (hauteur de sa tête).

b) C'est le sommet de la parabole, dont les coordonnées sont $(20 ; 160)$.

c) La puce a atterri à $100\text{cm} = 1\text{m}$ des pieds d'Albert.

d) On a $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $c = 150$.
De plus, $-\frac{b}{2a} = 20$ et $a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + 150 = 0$

Donc $b = -40a$ et $a \cdot 100^2 - 40 \cdot a \cdot 100 + 150 = 0$
d'où $6000\, a = -150$ et $a = -\frac{1}{40}$ et $b = 1$

Donc $f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + x + 150$.

e) Graphiquement en $x = 60$ cm des pieds d'Albert.
Algébriquement, on résout $-\frac{1}{40}x^2 + x + 150 = 120$

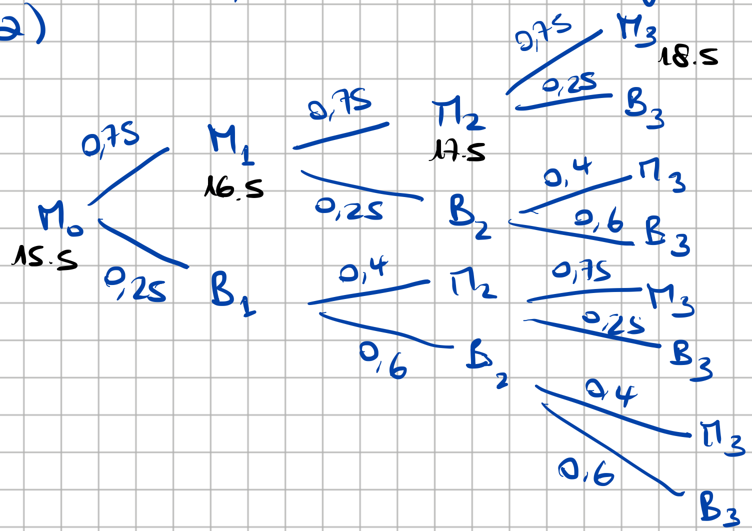
$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 40x - 1200}_{(x-60)(x+20)} = 0$. Comme $x > 0$,

$x = 60$ cm comme avant.

Ex.3 (Probabilités)

On pose B_i = "il fait beau le jour i" et
M_i = "il fait mauvais le jour i".

a)



b) $p(M_1 \cap M_2 \cap B_3) = 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 = \frac{9}{64} \cong 14{,}06\,\%$

c) $p(B_1 \cup (M_1 \cap B_2) \cup (M_1 \cap M_2 \cap B_3)) =$

$= 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 = \frac{37}{64} \cong 57{,}81\,\%$

Ou $1 - p(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = 1 - 0{,}75^3 = \frac{37}{64} \cong 57{,}81\,\%$.

d) $p(B_3 \mid M_1) = \dfrac{p(B_3 \cap M_1)}{p(M_1)} =$

$= \dfrac{0{,}75 \cdot (0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}25 \cdot 0{,}6)}{0{,}75} = \frac{27}{80} = 33{,}75\,\%$

Ex. 4

a) $N = 50$

Classe	n_i	Centres	f_i	F_i
[0 ; 40 [	3	20	0,06	0,06
[40 ; 80 [	5	60	0,1	0,16
[80 ; 120 [	8	100	0,16	0,32
[120 ; 160 [	14	140	0,28	0,6
[160 ; 200 [	12	180	0,24	0,84
[200 ; 240 [	6	220	0,12	0,96
[240 ; 280 [	2	260	0,04	1

b) $\bar{x} = \frac{1}{50} \cdot \sum n_i x_i = \frac{7120}{50} = 142,4$

c) $\sigma^2 = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = 3482,24$,

$\sigma \cong 59.$ $(59,01)$

d) Classe modale : [120 ; 160 [

Mode : $120 + \frac{14-8}{(14-8)+(14-12)} \cdot 40 = 150$.

e) $Q_1 = 80 + 40 \cdot \frac{0,25 - 0,16}{0,16} = 102,5$

f) $X \sim N(14 ; 36)$

On cherche c pour que $P(X > c) = 3,01\%$

Donc $P\left(Z > \frac{c-14}{\sqrt{36}} \right) = 3,01\%$

d'où $P\left(Z \leq \frac{c-14}{6} \right) = 96,99\%$

table $\Rightarrow$ $c - 14 = 6 \cdot 1,88$ donc $c = 25,28$.

Ex. 5

a) $C(t) = 20'000 \cdot 1{,}03^t$ donc

$C(12) = 20'000 \cdot 1{,}03^{12} \cong 28515{,}20$ Fr

b) On veut t tel que $36'000 = 20'000 \cdot 1{,}03^t$

donc $\frac{36}{20} = 1{,}03^t \Rightarrow t \cdot \ln(1{,}03) = \ln(1{,}8)$

Ainsi $t = \frac{\ln(1{,}8)}{\ln(1{,}03)} \cong 19{,}89 \cong 20$ ans

donc il faudrait attendre encore $20 - 12 = 8$ ans.

c) On veut i tel que $40'000 = 20'000 \cdot (1+i)^{10}$

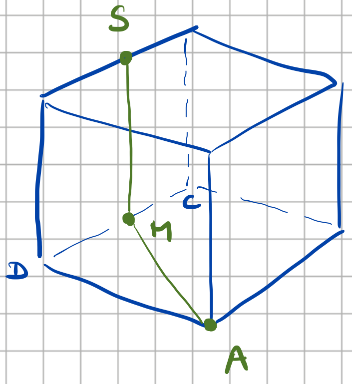
donc $2 = (1+i)^{10} \Rightarrow 1 + i = \sqrt[10]{2}$ et

$i = \sqrt[10]{2} - 1 \cong 0{,}07177 \cong 7{,}18\,\%$.

Ex. 6

a) $V = \frac{1}{3}\,\text{base} \cdot \text{hauteur} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot 12 = 288\ cm^3$

b)



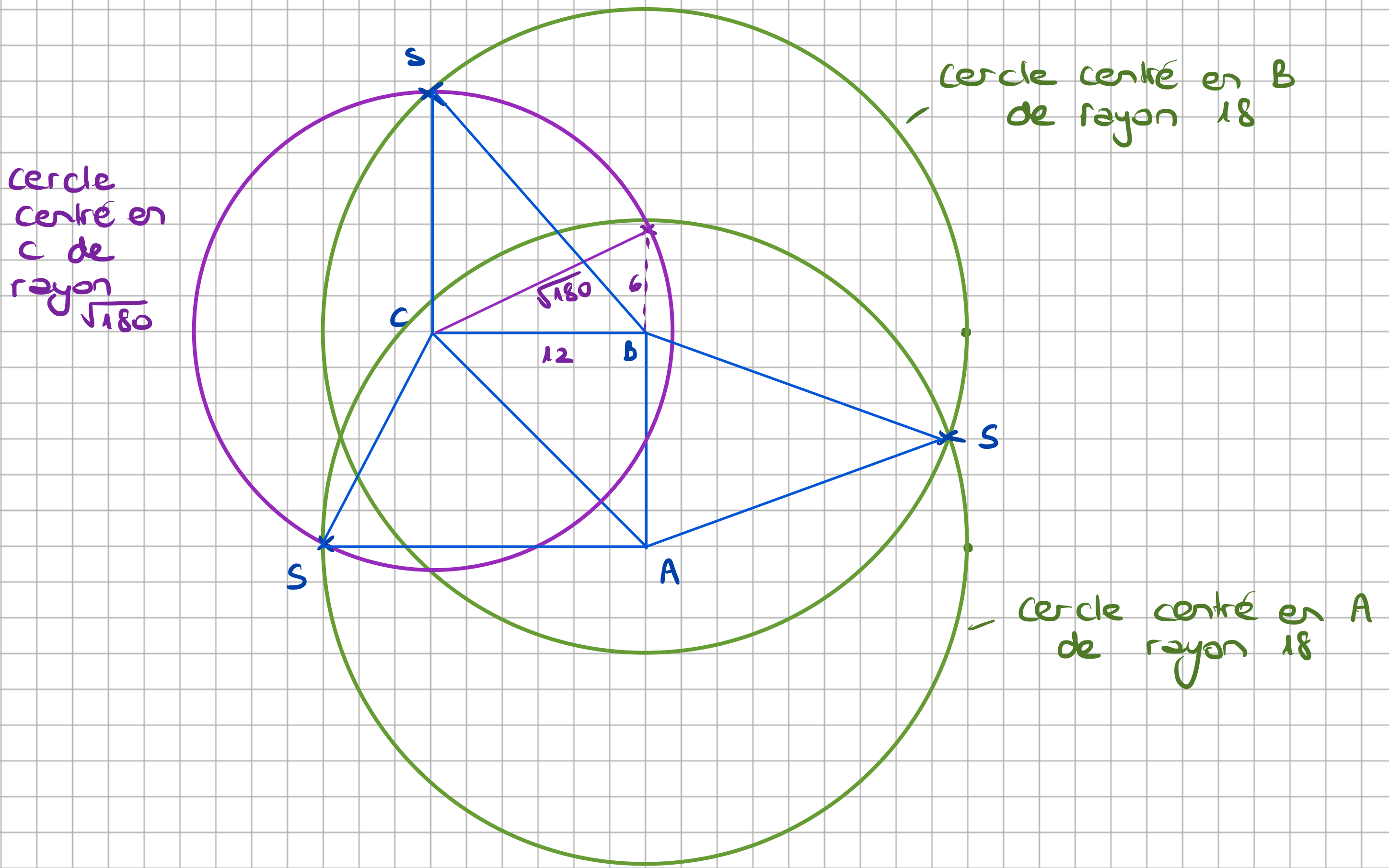
Appelons M le milieu de DC,

alors $AM = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6 \cdot \sqrt{2^2+1} =$

$= 2\sqrt{5}$ ou $\sqrt{180}$

Donc $AS = \sqrt{180 + 12^2} = \sqrt{324} = 18cm$

c) $CS = \sqrt{180} = \sqrt{12^2 + 6^2}$ et $BS = AS = \sqrt{324} = 18$



d) On a $CS = \sqrt{180}$, $AS = 18$ et $CA = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{288}$

Par le thm du cosinus : $288 = 180 + 324 - 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{180} \cdot \cos(\alpha)$

où $\alpha = \widehat{CSA}$. Donc $\cos(\alpha) = \dfrac{216}{36\sqrt{180}} \cong 0{,}4472 \Rightarrow \alpha \cong 63{,}4°$

Ainsi l'aire de $\Delta ACS = \frac{1}{2}\sqrt{180} \cdot 18 \cdot \sin(\alpha) = 108\ cm^2$.

e) $A_{tot} = \underbrace{108}_{\Delta ACS} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 12^2}_{\Delta ABC} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{12^2+12^2}}_{\Delta ABS} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overbrace{\sqrt{180}}^{=CS} \cdot 12}_{\Delta BCS} \cong \overbrace{362{,}32\,cm^2}^{\text{ou } 180 + 72\sqrt{2} + 36\sqrt{5}}$

$\widehat{CAS}$: $180 = 324 + 288 - 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{288} \cdot \cos(\alpha)$

Donc $\cos(\alpha) = \dfrac{432}{36 \cdot \sqrt{288}} \cong 0{,}7071 \Rightarrow \alpha = 45°$

Ainsi l'aire du ΔACS vaut $\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108 \text{ cm}^2$

Problème 1

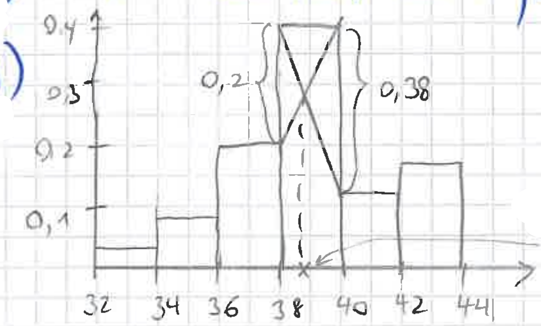
a)

$[S_{i-1} ; S_i[$	x_i	n_i	f_i	F_i	$\sum f_i(x_i-\bar{x})^2$
[32 ; 34 [	33	2	0,04	0,04	1,402
[34 ; 36 [	35	4	0,08	0,12	1,229
[36 ; 38 [	37	10	0,2	$\boxed{0,32}$	0,737
[38 ; 40 [	39	20	0,4	0,72	0,003
[40 ; 42 [	41	6	0,12	0,84	0,519
[42 ; 44 [	43	8	0,16	1	2,663

b) $\bar{x} = \sum x_i f_i = 38,92$.

c) $V = \sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i = 6,553$, $\sigma = \sqrt{V} \cong 2,6$

d)



e) Classe Modale :
[38 ; 40 [.

f) $M = 38 + \dfrac{0,2}{0,2+0,38} \cdot 2 \cong 38,69$.

g) $Q_1 = 36 + 2 \cdot \dfrac{0,25 - 0,12}{0,2} = 37,3$.

Problème 2

a) $C(15) = 30'000 \cdot (1,04)^{15} \cong \underline{54'028,30}$

b) $72'000 = 30'000 \cdot 1,04^{n}$ donc

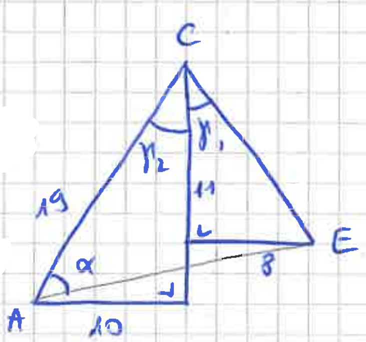
$n = \dfrac{\ln(72/30)}{\ln(1,04)} \cong 22,32$ donc il devrait

attendre $7,32 \cong 7$ ans et 4 mois environ.

c) $30'000 \cdot (1+t)^{15} = 72'000$

$t = \sqrt[15]{72/30} - 1 \cong 6,01\ \%$.

Problème 3



a) $\tan(\gamma_1) = \dfrac{8}{11} \rightarrow \gamma_1 \cong 36,03$

$\sin(\gamma_2) = \dfrac{10}{19} \rightarrow \gamma_2 \cong 31,76$

$\Rightarrow \gamma \cong 67,79°$

b) $CE = \sqrt{11^2 + 8^2} \cong 13,6 \quad (= \sqrt{185})$

Thm du cos : $AE^2 = 19^2 + 185 - 2 \cdot 19 \cdot \sqrt{185} \cdot \cos\gamma$

$\Rightarrow AE \cong 18,72$.

c) $\dfrac{CE}{\sin(\alpha)} = \dfrac{AE}{\sin(\gamma)}$ donc $\sin(\alpha) = 13,6 \cdot \sin(67,79°) \dfrac{1}{18,72}$

$\rightarrow \alpha \cong \underline{42,27°}$

Problème 4

a) Longueur totale des arêtes :

$8\cdot 8+4\cdot 4+4\cdot 6+4\cdot \underbrace{IJ}$

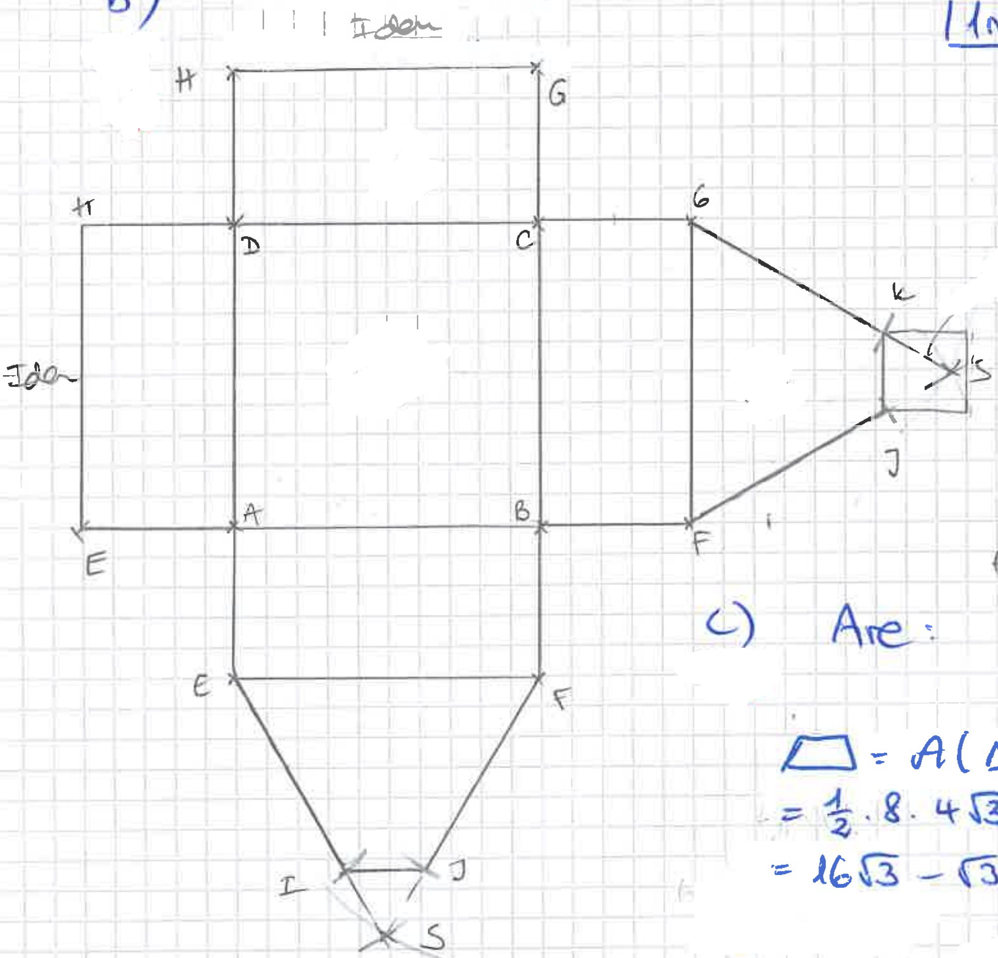
$=112\,m.$

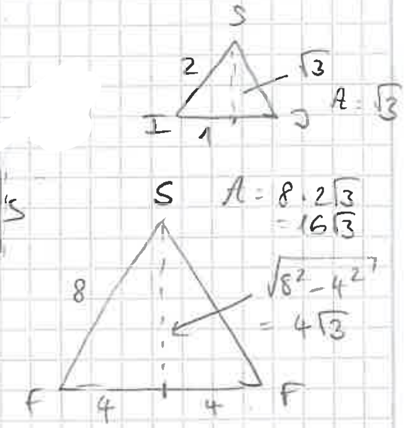
$ES-EI=8-6=2$

↳ le Δ IJS est équilatéral ($\sphericalangle ISJ=60°$)

$\boxed{1m \Leftrightarrow 5mm}$

b)





c) Aire : $64+4\cdot 8\cdot 4$

$+4\cdot \square + 2^2$

$\square = A(\Delta EFS)-A(\Delta IJS)$

$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}$

$=16\sqrt{3}-\sqrt{3}=15\sqrt{3}$

$\Rightarrow A = 192+15\sqrt{3}\cdot 4+2^2 = 196+60\sqrt{3}\cong 299.9$

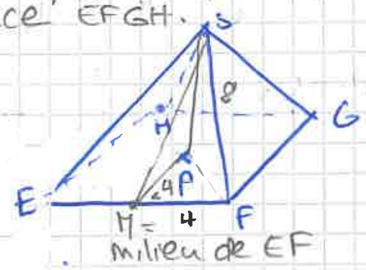
d) $V = 4\cdot 8^2+V(EFGHS)-V(IJKLS)$

Soit P le milieu de la face EFGH.

$PF=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$, $FS=8$

$PS=\sqrt{8^2-32}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\Rightarrow V(EFGHS)=\frac{1}{3}\cdot 8^2\cdot 4\sqrt{2}=\frac{256}{3}\sqrt{2}$



De même, si Q = le milieu de la face IJKL, et N = milieu de IJ.

$QJ=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $JS=2$,

$QS=\sqrt{2^2-2}=\sqrt{2}$ $\Rightarrow V(IJKLS)=\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$

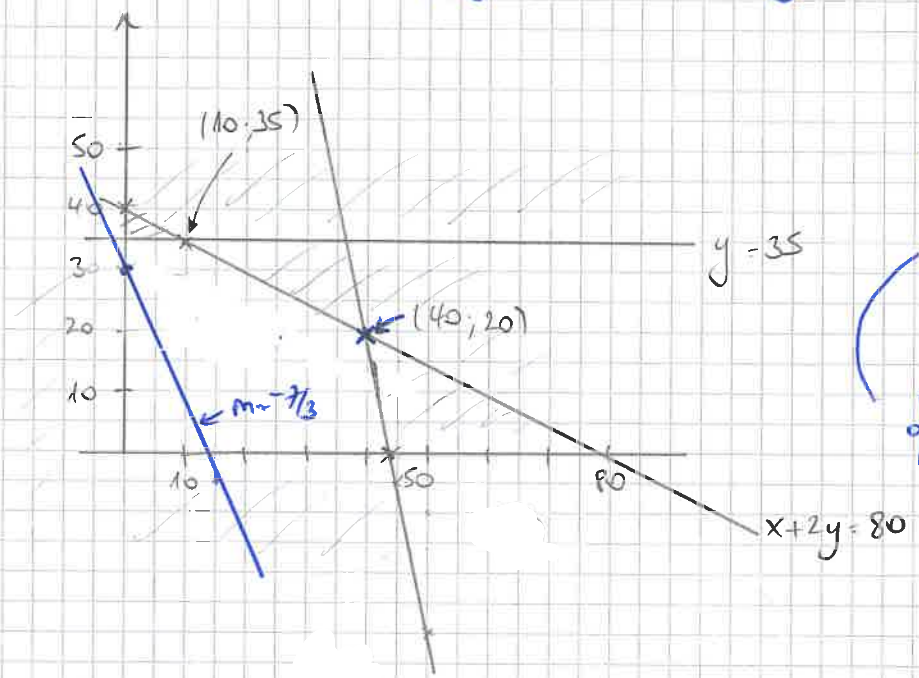
$\Rightarrow V = 256+\frac{256}{3}\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}=256+\frac{252}{3}\sqrt{2}\cong 374{,}8\,m^3$

Probleme 5

x = nb de voiliers , y = nb de motos .

Benefice : $p = 70x + 30y$, $m = -7/3$.

Contraintes : $\begin{cases} 500x + 100y \leq 22'000 \Leftrightarrow 5x + y \leq 220 \\ 150x + 300y \leq 12'000 \Leftrightarrow x + 2y \leq 80. \\ y \leq 35 \ , \ x, y \geq 0 \end{cases}$



Max pour $x = 40$.
$y = 20$
$B = 3400$

$\begin{cases} x + 2y = 80 \\ 5x + y = 220 \end{cases}$

$-9x = -360$ $\quad E_2 - 2E_1$

$\rightarrow x = 40 , y = 20$.

Problème 6

A) a) $p = \frac{1}{C_4^{40}} \cdot C_2^{14} \cdot C_1^{21} \cdot C_1^{5} = \frac{147}{1406} \cong \underline{10,46\ \%}$.

b) $p = 1 - p(\text{aucune féra}) = 1 - \frac{C_4^{35}}{C_4^{40}} \cong \underline{42,71\ \%}$

c) $p(3 \text{ perches}) + p(4 \text{ perches}) = \frac{C_3^{21} \cdot C_1^{19} + C_4^{21}}{C_4^{40}} \cong \underline{34,20\ \%}$

B) d) $p = 0,36 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{25} = 24\%$

e) $p = 0,36 \cdot \frac{1}{3} + 0,52 \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{50} = 38\ \%$

f) $p(G \mid \text{Malade}) = \frac{p(G \cap \text{malade})}{p(\text{malade})} = \frac{0,52 \cdot \frac{1}{2}}{0,38} = \frac{13}{19}$

$\cong 68,4\ \%$

Problème 1

A. a) $A^{20}_4 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$

b) C'est $4! \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 5 = 400 \cdot 24 = 9600$

c) C'est $\underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{\text{rouges}} + \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{verts}} + \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{\text{jaunes}} = 1920.$

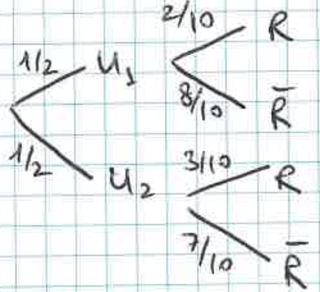
B. d) $p(1V \text{ et } 2J) = \dfrac{C^8_1 \cdot C^5_2}{C^{20}_3} = \dfrac{4}{57} \cong 7,02\,\%$

e) $p(\text{aucun } R) = \dfrac{C^{15}_3}{C^{20}_3} = \dfrac{91}{228} \cong 39,91\,\%$

f) $1 - p(\text{aucun } R) = \dfrac{137}{228} \cong 60,09\,\%$

C. R = " tirer un jeton rouge "

g)



h) $p(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} =$

$= \frac{1}{4} = 25\,\%$

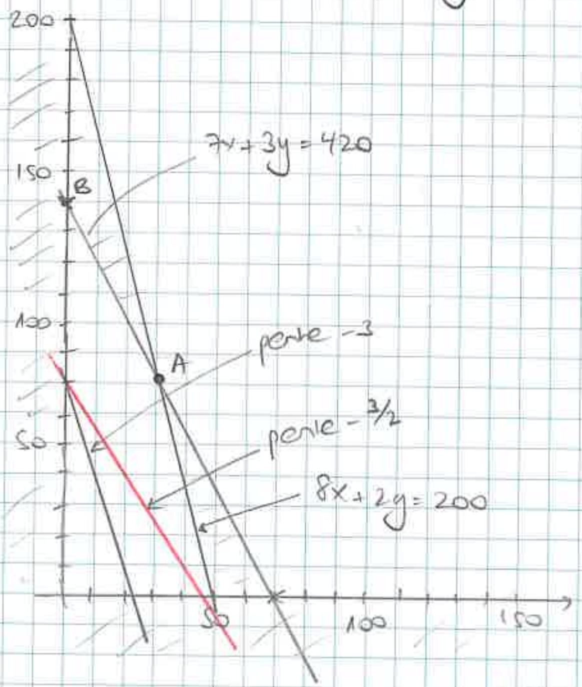
i) $p(U_2 \mid R) = \dfrac{p(U_2 \cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{5} = 60\,\%.$

Problème 2

a) On pose x = nombre de chaises et
y = nombre de tabourets.

Contraintes : $x, y \geq 0$,
$7x + 3y \leq 420$ (pieds)
$8x + 2y \leq 400$ (h. de main d'œuvre)

A maximiser : $f(x;y) = 30x + 10y$. pente $= -3$.



Le profit est maximum au point A :

$$\begin{cases} 7x + 3y = 420 \\ 8x + 2y = 400 \Leftrightarrow 4x + y = 200 \end{cases}$$

$\Rightarrow -5x = -180$, $x = 36$
et $y = 56$

b) Le profit vaut alors
$30 \cdot 36 + 10 \cdot 56 = 1640$.–

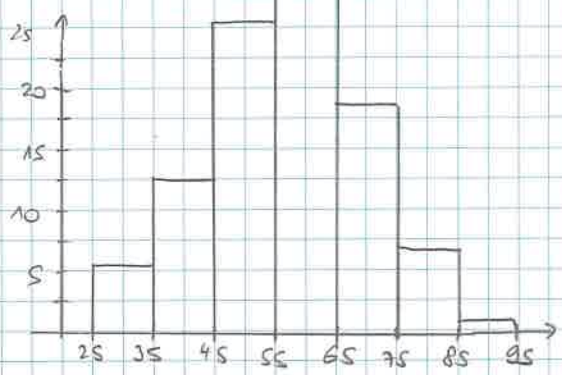
c) f devient alors $30x + 20y$ de pente $-\frac{3}{2}$
Il devient maximum pour le point $B(0;140)$.
donc $x = 0$ et $y = 140$.

Problème 3

a)

Classes	n_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
[25 ; 35[	7	5,47	5,47	1,641	39,048
[35 , 45[	16	12,50	17,97	5	34,936
[45 , 55[	34	26,56	44,53	13,28	11,987
[55 , 65[	37	28,91	73,44	17,346	3,114
[65 , 75[	24	18,75	92,19	13,125	33,077
[75 , 85[	9	7,03	99,22	5,624	38,106
[85 ; 95[	1	0,78	100	0,702	8,640
Tot :	128	100		56,718	168,908

b)



c) C'est $100 - 73,44 =$
$= 26,56\ \%$

d) $\bar{x} = \sum x_i f_i = 56,718$

$$Q_2 = 55 + \frac{0,5 - 0,4453}{0,2891} \cdot 10$$

$$\cong 56,89.$$

e) $\sigma^2 \cong 168,908$ donc 169 en arrondissant.
Ainsi $\sigma = 13$.

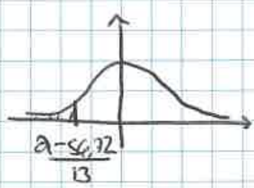
f) Vu l'histogramme, $X \sim N(56,72\ ;\ 13^2)$ (forme de cloche)

g) On veut $P(X > 77) = P\left(Z > \frac{77 - 56,72}{13}\right)$

$= P(Z > 1,56) = 1 - P(Z \leq 1,56) \cong 1 - 0,9406$

$\cong 5,94\ \%$

h) a = seuil. On veut $P(X \leq a) = 5\ \%$



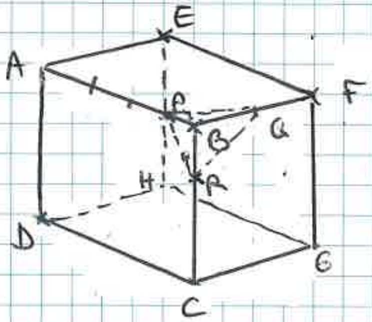
donc $P\left(Z \leq \frac{a - 56,72}{13}\right) = 0,05$

donc $P\left(Z \leq -\frac{a - 56,72}{13}\right) = 0,95 \Rightarrow -\frac{a - 56,72}{13} = 1,645$

donc $a - 56,72 = -21,385 \Rightarrow a \cong 35,34\ g.$

Problème 4

a)

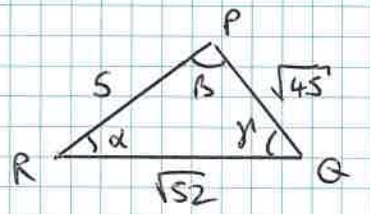


b) Volume de S =

Volume (cube) − Vol (PQRB)

$= 12^3 - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot 4 = 1716 \text{ cm}^3$

c)



$PR = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $PQ = \sqrt{3^2+6^2} = 3\sqrt{5}$ $(= \sqrt{45})$

$RQ = \sqrt{4^2+6^2} = 2\sqrt{13} = \sqrt{52}$

Thm du cosinus : $45 = 25 + 52 - 2\sqrt{45}\cdot\sqrt{52}\cdot\cos(\alpha)$

donc $\cos(\alpha) = \dfrac{45-25-52}{-2\sqrt{25}\cdot\sqrt{52}} \cong 0,4438 \Rightarrow \alpha \cong 63,65°$

De même, $52 = 25 + 45 - 2\cdot 5\cdot\sqrt{45}\cdot\cos(\beta)$

donc $\cos(\beta) = \dfrac{52-25-45}{-10\cdot\sqrt{45}} \cong 0,2683 \Rightarrow \beta \cong 74,44°$

et $\gamma = 180° - \alpha - \beta \cong 41,91°$

d) L'aire du ΔPQR vaut $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{52}\cdot\sin(\alpha) \cong 16,16$

Aire de $S = 16,16 + 3\cdot 12^2 + (12^2 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4) +$
$(12^2 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6) + (12^2 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6) = 853,16 \text{ cm}^2$.

Problème 5

A. a) $C_A(t) = 12000\cdot 1,048^t$ donc $C_A(10) \cong 19177,60$
$C_B(t) = 13000\cdot 1,044^t$ donc $C_B(10) \cong 19996,20$

b) On veut t tel que $12000\cdot 1,048^t = 13000\cdot 1,044^t$

donc $\left(\dfrac{1,048}{1,044}\right)^t = \dfrac{13}{12}$ donc

$t = \dfrac{\ln(13/12)}{\ln(1,048/1,044)} \cong 20,93 = 20$ ans et 11 mois environ.

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{x}}^2)$ car $n = 50 > 30$.

B. c) H_0 : la moyenne des bocaux est de 250 ml

H_1 : $\mu < 250$ (test unilatéral).

Seuil : 5%

Score du test : $\sigma_{\bar{x}} \simeq \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{4}{\sqrt{50}} \simeq 0,57$

$t = \frac{248,8 - 250}{0,57} \simeq -2,11$.

$t = -2,11 < -1,645$

On rejette H_0.

d) La moyenne des volumes des bocaux est inférieure à 250 ml.

C. e) A 0h24, 3h20 et 6h30.

f) Elle est de 39°

g) La temp. maximale est 42°, et minimale est 37,8°.

h) Elle est en baisse entre 2h et 4h50.

Problème 1 (9 points)
Les taux d'intérêt de ce problème sont tous annuels et composés annuellement.

a) Je possède 5000 francs que je place à un taux d'intérêt de 0.5%. Quelle somme aurai-je dans 10 ans ?

b) Je possède 5000 francs. Quel devrait être le taux d'intérêt pour qu'après 10 ans, la somme capitalisée soit de 5388 francs ?

c) Je possède 5000 francs que je place à un taux d'intérêt de 0.5%. Combien d'années devrai-je attendre pour posséder 5443 francs ?

Solution.

a) Je posséderai $5000 \cdot 1.005^{10} = 5255.70$ francs.

b) Résoudre $5000 \cdot (1+t)^{10} = 5388$. On obtient $t = \sqrt[10]{\frac{5388}{5000}} - 1 = 0.75\%$.

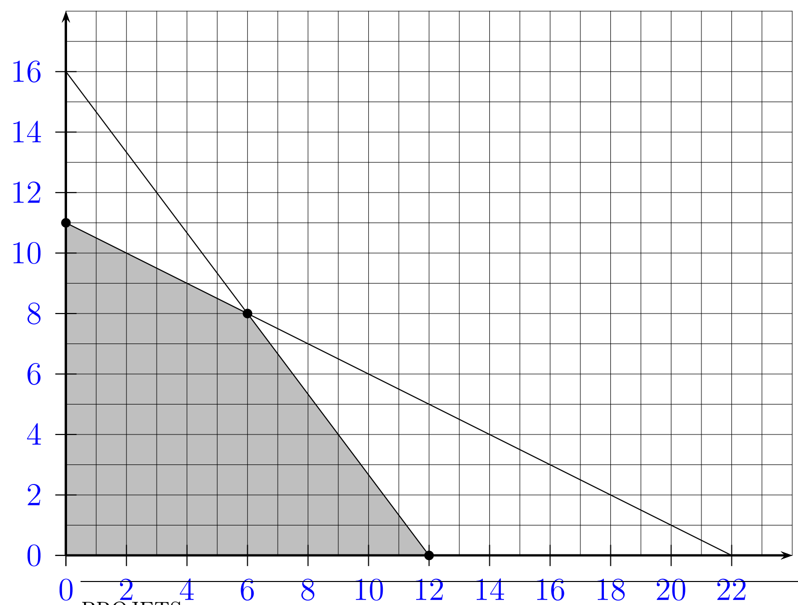
c) Résoudre $5000 \cdot 1.005^n = 5443$. On obtient $n = \frac{\ln\left(\frac{5443}{5000}\right)}{\ln 1.005} = \frac{\ln 1.0886}{\ln 1.005} = 17.02$ années.

Problème 2 (14 points)
Un artisan fabrique des objets A et des objets B. Pour fabriquer un objet A, il dépense 1 franc pour les matières premières et 4 francs en main-d'œuvre. Pour fabriquer un objet B, il dépense 2 francs pour les matières premières et 3 francs en main-d'œuvre. Il plafonne ses dépenses à 22 francs par heure pour les matières premières et à 48 francs par heure pour la main-d'œuvre. Les profits réalisés sont de 2 francs par objet A et de 3 francs par objet B.
Comment organiser la production afin de maximiser le profit ?

Solution
Soit x le nombre d'objets A fabriqués en une heure et y le nombre d'objets B fabriqués en une heure.

Contraintes : $\begin{cases} x + 2\,y \leq 22 \\ 4\,x + 3\,y \leq 48 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Fonction économique à maximiser (profit en francs) : $P = 2\,x + 3\,y$.



Les sommets du polygone des contraintes :
$A = (0;0)$
$B = (12;0)$
$C = (6;8)$
$D = (0;11)$

$S(x;y)$	$P = 2\,x + 3\,y$
$(0;11)$	$0 + 33 = 33$
$(6;8)$	$12 + 24 = 36$
$(12;0)$	$24 + 0 = 24$

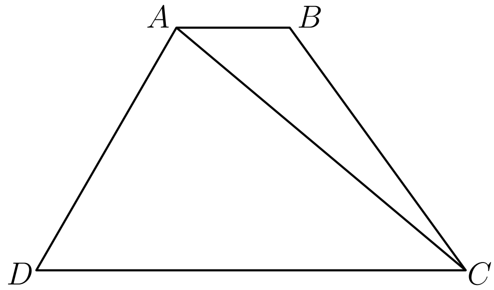
Le profit est maximal, et vaut 36 francs, lorsque l'artisan fabrique 6 objets A et 8 objets B.

Problème 3 (7 points)

Soit un trapèze $ABCD$ dont on connaît les bases $CD = 113$ et $AB = 30$ et la diagonale $AC = 100$ ainsi que les angles $\widehat{CAB} = 40°$ et $\widehat{CAD} = 80°$.

a) Calculer l'angle $\widehat{ADC}$.

b) Calculer la longueur du côté BC.



Solution.

a) On utilise la formule du sinus : $\frac{\sin\widehat{DAC}}{DC} = \frac{\sin\widehat{ADC}}{AC}$.
Ainsi $\sin\widehat{ADC} = \frac{\sin 80°}{113} \cdot 100 = 0.8715$ et par conséquent $\widehat{ADC} = 60.63°$.

b) On utilise la formule du cosinus : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\widehat{BAC})$.
On a $\overline{BC}^2 = 30^2 + 100^2 - 2 \cdot 30 \cdot 100 \cdot \cos 40° = 6303.73$. Ainsi $\overline{BC} = 79.396$.

Problème 4 (9 points)

On dispose de 8 jetons ; sur trois d'entre eux est inscrit une consonne : R S T, sur les cinq autres est inscrit une voyelle : A, E, I, O U.

On considère des mots de 8 lettres ayant un sens (tel `autorisé`) ou non (tel `aresitou`).

a) Déterminer le nombre de façons différentes d'aligner ces 8 jetons pour obtenir un mot de 8 lettres.

b) Déterminer le nombre de façons différentes dont on peut aligner ces 8 jetons si l'on exige que la première et la dernière lettre du mot soient une voyelle.

On considère maintenant des mots de 4 lettres ayant un sens ou non.

c) Déterminer, en alignant 4 de ces 8 jetons, le nombre de façons différentes de former des mots de 4 lettres.

d) Déterminer, en alignant 4 de ces 8 jetons, le nombre de façons différentes de former des mots de 4 lettres qui ont au moins une consonne.

Solution.

a) $A_8^8 = 8! = 40320$.

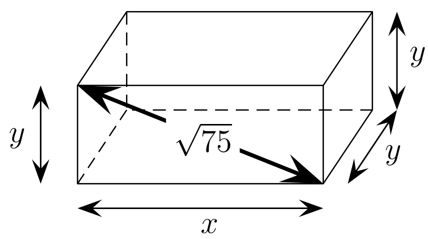
b) $5 \cdot 4 \cdot 6! = 14400$.

c) $A_4^8 = 1680$.

d) $A_4^8 - A_4^5 = 1680 - 120 = 1560$.

Problème 5 (11 points)

Une entreprise a besoin de boîtes ayant la forme d'un parallélépipède rectangle qui a 4 faces rectangulaires dont les diagonales mesurent $\sqrt{75}$ et qui a 2 faces carrées.



a) Déterminer les dimensions x et y pour que ces boîtes aient un volume maximal.

b) Quel est le volume d'une telle boîte ?

Solution.

a) La contrainte : $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{75}\right)^2 = 75$.
À maximiser le volume : $V = x\,y^2$.
On exprime y^2 en fonction de x : $y^2 = 75 - x^2$.
Le volume en fonction de x : $V(x) = x\,(75 - x^2) = 75\,x - x^3$.
Calcul de V' : $V'(x) = 75 - 3\,x^2$.

		-5		5	
$V'(x) = 75 - 3\,x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Le volume est maximal lorsque $x = 5$ et $y = \sqrt{50}$.

b) Le volume de cette boîte est 250.

Problème 6 (11 points)
Lors d'une course à pieds de 10 km, on a noté les temps de parcours des participants en minutes :

Temps de parcours en minutes	$[25\,;35[$	$[35\,;45[$	$[45\,;55[$	$[55\,;65[$	$[65\,;75[$
Nombre de coureurs	15	35	55	75	20

a) Quelle est la classe modale ? Calculer le mode. Représenter l'histogramme de distribution.

b) Établir le tableau des effectifs, des fréquences et des fréquences cumulées.

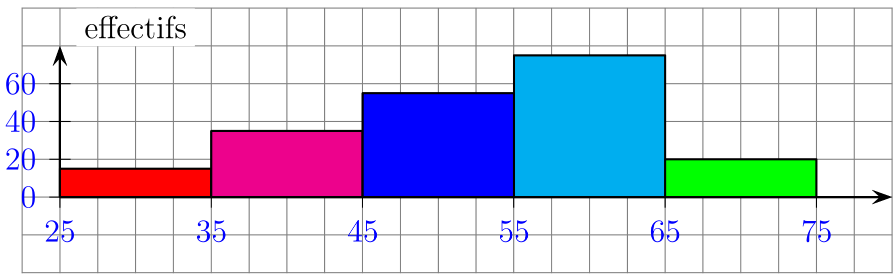
c) Représenter le polygone des fréquences cumulées.

d) Déterminer graphiquement la médiane Q_2, et les premier et troisième quartiles Q_1 et Q_3.

e) Calculer la médiane Q_2.

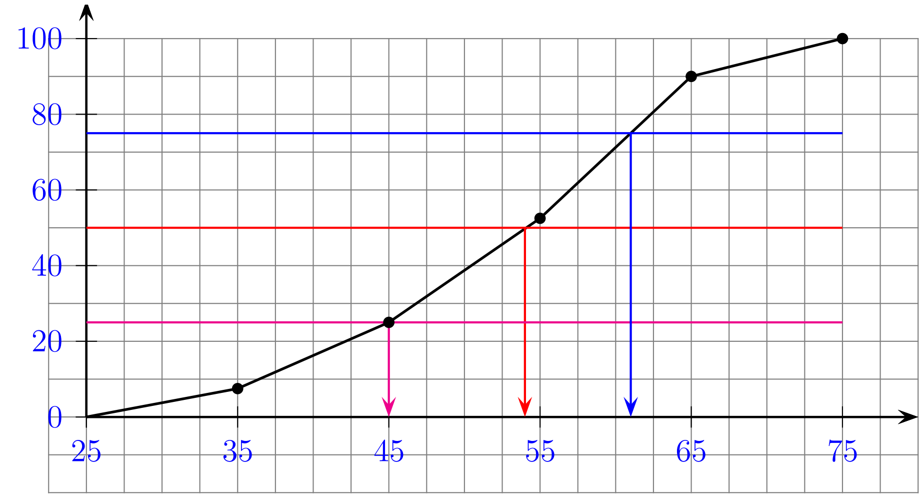
Solution.

a) La classe modale est $[55\,;65[$, Le mode est 57.66.



b)

Temps (en minutes)	[25 ; 35[	[35 ; 45[	[45 ; 55[	[55 ; 65[	[65 ; 75[
Nombre de coureurs	15	35	55	75	20
Fréquences	0.075	0.175	0.275	0.375	0.1
Fréquences cumulées	0.075	0.25	0.525	0.9	1



c)

d) On a $Q_1 = 45$, $Q_2 = 54$ et $Q_3 = 61$.

e) La médiane Q_2 est $45 + 10 \cdot \dfrac{0.25}{0.525} = 54.\overline{09}$.

Problème 7 (12 points)
On pêche successivement deux poissons dans un aquarium qui contient 6 poissons rouges, 3 poissons argentés et un poisson doré.

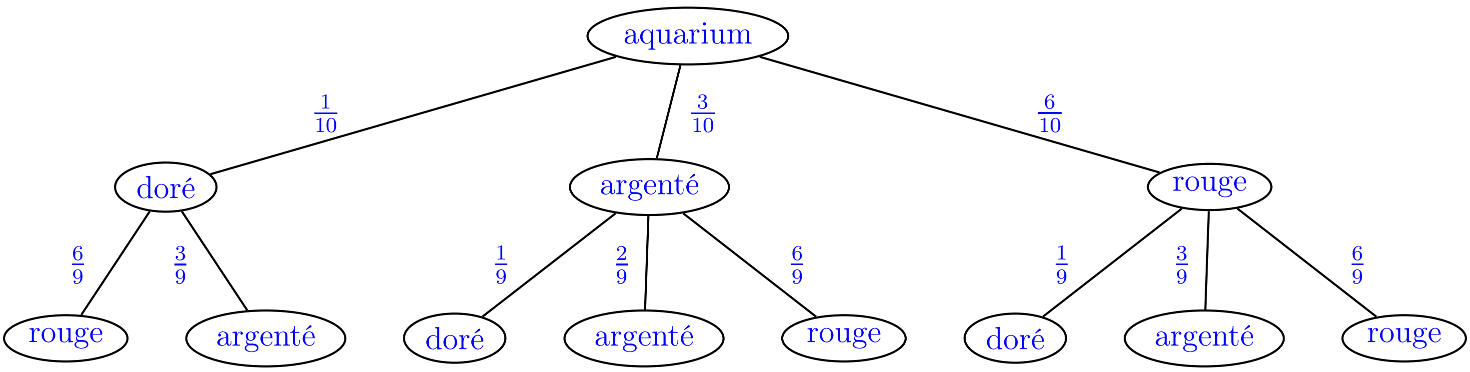
a) Représenter cette situation par un arbre.

b) Quelle est la probabilité de pêcher deux poissons de couleurs différentes ?

c) Si l'on a pêché deux poissons de couleurs différentes, quelle est la probabilité que l'on ait pêché en premier le poisson doré ?

d) Si l'on ne pêche pas le poisson doré, quelle est la probabilité de pêcher deux poissons de couleurs différentes ?

Solution.



b) $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{6}{9}\right) + \frac{6}{10} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{3}{9}\right) = \frac{9+21+24}{90} = \frac{54}{90} = 60\%$

c) C'est une probabilité conditionnelle $p(A \mid B)$ où $A =$ « le premier poisson est doré » et $B =$ « les deux poissons sont de couleurs différentes ». On a

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.1}{0.6} = 16.66\%$$

d) $\frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} + \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{36}{72} = 50\%$

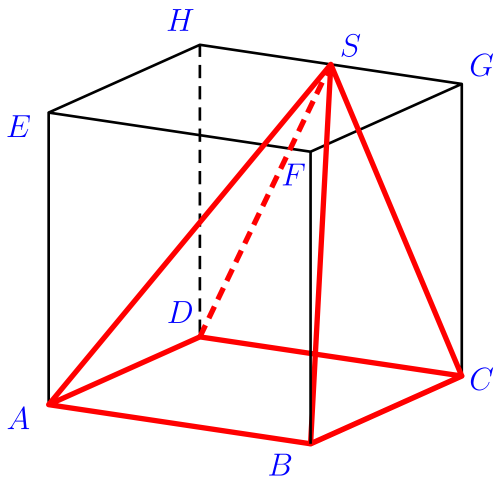
Problème 8 (12 points)

Le sommet S de la pyramide $SABCD$ de base $ABCD$ est au milieu de l'arête HG d'un cube $ABCDEFGH$ dont les arêtes mesurent 4 centimètres.

a) Déterminer le volume de la pyramide $SABCD$.

b) Dessiner un développement à l'échelle de la pyramide $SABCD$.

c) Calculer l'aire totale de cette pyramide.



Solution.

a) Le volume de la pyramide est $\frac{64}{3} = 21.33$.

b)+c) Le développement est composé d'un carré d'aire 16, d'un demi-carré d'aire 8, de deux triangles rectangles chacun d'aire $2\sqrt{20}$ et d'un triangle isocéle de côté 4, 6 et 6 dont l'aire est $2\sqrt{32}$. L'aire totale est donc $24 + 8\sqrt{5} + 8\sqrt{2} = 53.20$.