1 Systèmes linéaires

Méthode du pivot de Gauss

Exemple 1.1 Considérons le système d'équations $\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ 2\,x + 3\,y = 9 \end{cases}$.

Résolvons ce système d'une manière inédite.

Si l'on élimine les x dans la seconde équation, on trouvera la valeur de y. Pour cela, transformons la seconde équation en lui soustrayant le double de la première :

$$\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ 2\,x + 3\,y = 9 \end{cases} \quad \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ \phantom{x -{}} 7\,y = 7 \end{cases}$$

En divisant la seconde équation par 7, on obtient la valeur de y :

$$\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ \phantom{x -{}} 7\,y = 7 \end{cases} \quad \overset{\mathrm{L}_2 \to 1/7\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ \phantom{x - 2{}} y = 1 \end{cases}$$

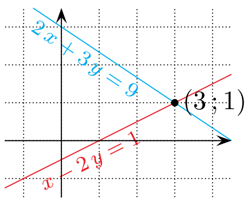
À ce stade, il est bien tentant de remplacer $y = 1$ dans la première équation pour trouver la valeur de x. Mais ce n'est pas ce que l'on va faire !

On va plutôt faire disparaître les y dans la première équation en lui ajoutant le double de la seconde :

$$\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ \phantom{x - 2{}} y = 1 \end{cases} \quad \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} x \phantom{{}- 2\,y} = 3 \\ \phantom{x - 2{}} y = 1 \end{cases}$$

On a obtenu une unique solution $\mathrm{S} = \left\{(3\,;1)\right\}$.

Elle correspond, d'un point de vue géométrique, aux coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $x - 2\,y = 1$ et $2\,x + 3\,y = 9$.



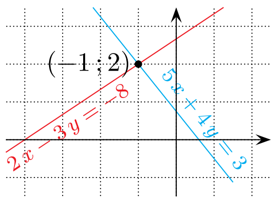
Exemple 1.2 Illustrons encore une fois cette nouvelle méthode.

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y = -8 \\ 5\,x + 4\,y = 3 \end{cases} \quad \overset{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 - 5\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} 2\,x - 3\,y = -8 \\ \phantom{2\,x -{}} 23\,y = 46 \end{cases} \quad \overset{\mathrm{L}_2 \to 1/23\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y = -8 \\ \phantom{2\,x - 3{}} y = 2 \end{cases} \quad \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 3\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} 2\,x \phantom{{}- 3\,y} = -2 \\ \phantom{2\,x - 3{}} y = 2 \end{cases} \quad \overset{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} x \phantom{{}- 3\,y} = -1 \\ \phantom{x - 3{}} y = 2 \end{cases}$$

On a obtenu une unique solution $\mathrm{S} = \left\{(-1\,;2)\right\}$.

Elle correspond, d'un point de vue géométrique, aux coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $2\,x - 3\,y = -8$ et $5\,x + 4\,y = 3$.

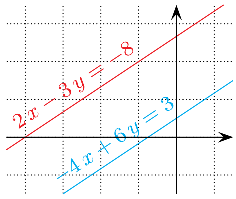


Exemple 1.3 Continuons d'appliquer cette méthode à un nouvel exemple.

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y = -8 \\ -4\,x + 6\,y = 3 \end{cases} \overset{L_2 \to L_2 + 2\,L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,x - 3\,y = -8 \\ 0\,y = -13 \end{cases}$$

Il se passe ici quelque chose de nouveau : quelle que soit la valeur de y, on aura toujours $0\,y = 0 \neq -13$. Ce système n'admet donc aucune solution : $S = \varnothing$. On dit d'un tel système qu'il est **impossible** ou **inconsistant**.

L'interprétation géométrique explique pourquoi ce système n'admet aucune solution : les droites d'équations $2\,x - 3\,y = -8$ et $-4\,x + 6\,y = 3$ sont parallèles.



Exemple 1.4 Examinons encore un autre cas particulier.

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y = -6 \\ -4\,x + 6\,y = 12 \end{cases} \overset{L_2 \to L_2 + 2\,L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,x - 3\,y = -6 \\ 0\,y = 0 \end{cases}$$

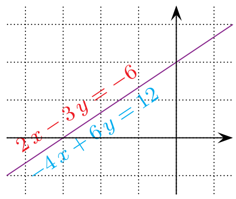
L'équation $0\,y = 0$ est vérifiée pour n'importe quelle valeur de y.
On l'indique en posant $y = \alpha$, où α représente un nombre réel quelconque.
Vu que y prend n'importe quelle valeur, on dit que c'est une **variable libre**.

$$\begin{cases} 2\,x - 3\,y = -6 \\ y = \alpha \end{cases} \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \overset{L_1 \to L_1 + 3\,L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,x = -6 + 3\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\overset{L_1 \to 1/2\,L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = -3 + \frac{3}{2}\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

On a obtenu une infinité de solutions : $S = \left\{(-3 + \frac{3}{2}\,\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

L'interprétation géométrique facilite la compréhension : les droites d'équations $2\,x - 3\,y = -6$ et $-4\,x + 6\,y = 12$ sont confondues. N'importe quel point de l'une de ces droites appartient donc à l'ensemble des solutions.



On reconnaît dans la notation de l'ensemble des solutions

$$\begin{cases} x = -3 + \frac{3}{2}\,\alpha \\ y = 0 + \alpha \end{cases} \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

des équations paramétriques de la droite passant par le point $(-3\,;0)$ et admettant pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cette interprétation géométrique permet de réaliser que l'on peut désigner plus simplement l'ensemble des solutions :

$$S = \left\{(-3 + 3\,\alpha\,;2\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

1.1 Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

1) $\begin{cases} 2\,x + 3\,y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\,x + 3\,y = 3 \\ 4\,x + 6\,y = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2\,x + 3\,y = 3 \\ 4\,x + 6\,y = 6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 2\,y = -1 \\ -x + 2\,y = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3\,x + 4\,y = -17 \\ -5\,x + 7\,y = -81 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3\,x + 4\,y = -17 \\ 15\,x + 20\,y = -85 \end{cases}$

Exemple 1.5 Résolvons le système d'équations $\begin{cases} x + 2\,y + 2\,z = 4 \\ x + 3\,y + 3\,z = 5 \\ 2\,x + 6\,y + 5\,z = 6 \end{cases}$.

Conservons la première équation et combinons-la avec chacune des équations suivantes pour y supprimer les x :

$$\begin{cases} x + 2\,y + 2\,z = 4 \\ x + 3\,y + 3\,z = 5 \\ 2\,x + 6\,y + 5\,z = 6 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_1}{\overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow}} \begin{cases} x + 2\,y + 2\,z = 4 \\ y + z = 1 \\ 2\,y + z = -2 \end{cases}$$

On remarque que les deux dernières équations forment ainsi un système de deux équations à deux inconnues. Poursuivons en faisant disparaître les y dans la dernière équation, en lui soustrayant le double de la deuxième :

$$\begin{cases} x + 2\,y + 2\,z = 4 \\ y + z = 1 \\ 2\,y + z = -2 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x + 2\,y + 2\,z = 4 \\ y + z = 1 \\ -z = -4 \end{cases}$$

Bien sûr que la dernière équation donne $z = 4$.

Mais, on ne va surtout pas remplacer $z = 4$ dans les autres équations. Au lieu de cela, on va combiner la dernière équation avec chacune de celle qui la précède pour y supprimer les z.

$$\begin{cases} x + 2\,y + 2\,z = 4 \\ y + z = 1 \\ z = 4 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}{\overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 2\,\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}} \begin{cases} x + 2\,y = -4 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases}$$

Maintenant que la deuxième équation donne $y = -3$, on va, non substituer, mais combiner cette équation avec la première pour y faire disparaître les y :

$$\begin{cases} x + 2\,y = -4 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - 2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases}$$

On a obtenu une unique solution $\mathrm{S} = \big\{(2\,;-3\,;4)\big\}$.

Géométriquement, on a calculé les coordonnées du point d'intersection des trois plans d'équations $x+2\,y+2\,z = 4$, $x + 3\,y + 3\,z = 5$ et $2\,x + 6\,y + 5\,z = 6$.

Exemple 1.6 Illustrons à nouveau cette méthode.

$$\begin{cases} x+2y+z=3\\ 3x-y-3z=-1\\ 2x+3y+z=4\end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_2\to \mathrm{L}_2-3\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\to \mathrm{L}_3-2\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=3\\ -7y-6z=-10\\ -y-z=-2\end{cases}$$

Pour rendre les calculs plus agréables, permutons les deuxième et troisième équations, et changeons les signes de cette dernière :

$$\begin{cases} x+2y+z=3\\ y+z=2\\ -7y-6z=-10\end{cases} \overset{\mathrm{L}_3\to \mathrm{L}_3+7\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=3\\ y+z=2\\ z=4\end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_1\to \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_3\\ \mathrm{L}_2\to \mathrm{L}_2-\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} x+2y=-1\\ y=-2\\ z=4\end{cases} \overset{\mathrm{L}_1\to \mathrm{L}_1-2\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=3\\ y=-2\\ z=4\end{cases}$$

On a obtenu une unique solution $\mathrm{S}=\big\{(3\,;-2\,;4)\big\}$.

Exemple 1.7 Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x-y+2z=2\\ 2x+3y-z=9\\ x-6y+7z=-3\end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_2\to \mathrm{L}_2-2\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\to \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x-y+2z=2\\ 5y-5z=5\\ -5y+5z=-5\end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L}_2\to 1/5\,\mathrm{L}_2\\ \mathrm{L}_3\to 1/5\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} x-y+2z=2\\ y-z=1\\ -y+z=-1\end{cases} \overset{\mathrm{L}_3\to \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x-y+2z=2\\ y-z=1\\ 0\,z=0\end{cases}$$

La dernière équation $0\,z=0$ est vérifiée pour n'importe quelle valeur de z. On constate ainsi que z est une variable libre. On pose donc $z=\alpha$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

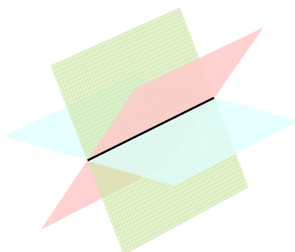
$$\begin{cases} x-y+2z=2\\ y-z=1\\ z=\alpha\end{cases} \text{ où } \alpha\in\mathbb{R} \overset{\substack{\mathrm{L}_1\to \mathrm{L}_1-2\,\mathrm{L}_3\\ \mathrm{L}_2\to \mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x-y=2-2\alpha\\ y=1+\alpha\\ z=\alpha\end{cases} \text{ où } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\overset{\mathrm{L}_1\to \mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=3-\alpha\\ y=1+\alpha\\ z=\alpha\end{cases} \text{ où } \alpha\in\mathbb{R}$$

On a obtenu une infinité de solutions :

$$\mathrm{S}=\big\{(3-\alpha\,;1+\alpha\,;\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\big\}.$$

Géométriquement, l'intersection des plans d'équations $x-y+2z=2$, $2x+3y-z=9$ et $x-6y+7z=-3$ est la droite passant par le point $(3\,;1\,;0)$ est de vecteur directeur $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.



Exemple 1.8 Examinons encore un cas particulier.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x - 2\,y + 3\,z &=& 2 \\ 2\,x - 4\,y + 6\,z &=& 4 \\ -3\,x + 6\,y - 9\,z &=& -6 \end{array}\right. \quad \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 3\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{r} x - 2\,y + 3\,z = 2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations sont vérifiées quelle que soit la valeur de y et quelle que soit la valeur de z. On a ici affaire à deux variables libres.

Comme y peut prendre n'importe quelle valeur, on pose $y = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vu que z prend aussi n'importe quelle valeur, on pose $z = \beta$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2\,y + 3\,z &=& 2 \\ y &=& \alpha \\ z &=& \beta \end{array}\right. \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \overset{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + 2\,\mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2 + 2\,\alpha - 3\,\beta \\ y &=& \alpha \\ z &=& \beta \end{array}\right. \quad \text{où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

On obtient une infinité de solutions : $\mathrm{S} = \Big\{(2 + 2\,\alpha - 3\,\beta\,;\alpha\,;\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\Big\}$.

D'un point de vue géométrique, la situation diffère de l'exemple précédent.

Ici, les trois plans sont confondus. La solution donne des équations paramétriques du plan commun, qui passe par le point $(2\,;0\,;0)$ et admet pour vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2 Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{l} x + 2\,y + z = 8 \\ 2\,x + y - z = 1 \\ 3\,x - y + 2\,z = 7 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{l} 2\,x - y + 3\,z = 4 \\ 3\,x + 4\,y - z = -5 \\ x + 5\,y - 4\,z = -9 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{l} 2\,x + y + 3\,z = 3 \\ 3\,x - y + 4\,z = 2 \\ 4\,x + y - z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} 2\,y + z = -2 \\ 3\,x + 5\,y - 5\,z = 1 \\ 2\,x + 4\,y - 2\,z = 2 \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{l} 2\,x - 3\,y + z = -1 \\ -6\,x + 9\,y - 3\,z = 3 \end{array}\right.$

6) $\left\{\begin{array}{l} 2\,x + 4\,y - 3\,z = 5 \\ 5\,x + 10\,y - 7\,z = 13 \\ 3\,x + 6\,y + 5\,z = 17 \end{array}\right.$

1.3 Quelle condition doit-on avoir sur a, b et c, de telle sorte que le système $\left\{\begin{array}{l} x + 2\,y - 3\,z = a \\ 2\,x + 6\,y - 11\,z = b \\ x - 2\,y + 7\,z = c \end{array}\right.$ admette une solution ? Cette solution est-elle unique ?

Remarque : on ne demande pas de donner de solutions.

1.4 Pour quelles valeurs de k le système $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$ a-t-il

1) aucune solution ? 2) une solution unique ? 3) plus d'une solution ?

Remarque : on ne demande pas de donner de solutions.

Exemple 1.9 Voici un exemple en provenance de la chimie.

Le mélange du toluène C_7H_8 et de l'acide nitrique HNO_3 produit, dans des conditions bien contrôlées, du trinitrotoluène $C_7H_5O_6N_3$, plus connu sous son abréviation TNT, et de l'eau H_2O. Pour savoir dans quelles proportions les mélanger, il s'agit d'équilibrer l'équation chimique :

$$x\,\mathrm{C_7H_8} + y\,\mathrm{HNO_3} \quad \longrightarrow \quad z\,\mathrm{C_7H_5O_6N_3} + t\,\mathrm{H_2O}$$

Pour avoir des quantités égales de carbone, d'hydrogène, d'azote et d'oxygène de part et d'autre, il faut satisfaire le système suivant :

$$\begin{cases} 7x = 7z \\ 8x + y = 5z + 2t \\ y = 3z \\ 3y = 6z + t \end{cases}$$

Afin de résoudre ce système, arrangeons-le plus simplement :

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 8x + y - 5z - 2t = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 3y - 6z - t = 0 \end{cases} \overset{\mathrm{L_2} \to \mathrm{L_2} - 8\,\mathrm{L_1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 3y - 6z - t = 0 \end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L_3} \to \mathrm{L_3} - \mathrm{L_2} \\ \mathrm{L_4} \to \mathrm{L_2} - 3\,\mathrm{L_2}}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \\ -6z + 2t = 0 \\ -15z + 5t = 0 \end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L_3} \to -1/2\,\mathrm{L_3} \\ \mathrm{L_4} \to \mathrm{L_4} - 3\,\mathrm{L_3}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \\ 3z - t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Puisque la dernière équation est vérifiée pour n'importe quelle valeur de t, on remarque que t est une variable libre. On pose donc $t = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z - 2t = 0 \\ 3z - t = 0 \\ t = \alpha \end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L_2} \to \mathrm{L_2} + 2\,\mathrm{L_4} \\ \mathrm{L_3} \to \mathrm{L_3} + \mathrm{L_4}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 2\alpha \\ 3z = \alpha \\ t = \alpha \end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L_1} \to 3\,\mathrm{L_1} + \mathrm{L_3} \\ \mathrm{L_2} \to \mathrm{L_2} - \mathrm{L_3}}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} 3x = \alpha \\ y = \alpha \\ 3z = \alpha \\ t = \alpha \end{cases} \overset{\substack{\mathrm{L_1} \to 1/3\,\mathrm{L_1} \\ \mathrm{L_3} \to 1/3\,\mathrm{L_3}}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = \frac{1}{3}\alpha \\ y = \alpha \\ z = \frac{1}{3}\alpha \\ t = \alpha \end{cases} \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

On a trouvé une infinité de solutions : $\mathrm{S} = \Big\{(\alpha\,;3\,\alpha\,;\alpha\,;3\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$.

Bien qu'on ne puisse pas représenter visuellement l'espace $\mathbb{R}^4$ à 4 dimensions, on peut tout de même interpréter géométriquement cet ensemble de solutions, en disant qu'il s'agit de la droite passant par l'origine $(0\,;0\,;0\,;0)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}$.

1.5 Résoudre les systèmes suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 5\,z & + & 4\,t & = & 1 \\ 2\,x & - & 3\,y & + & 2\,z & + & 3\,t & = & 18 \\ 4\,x & - & 7\,y & + & z & - & 6\,t & = & -5 \\ x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3\,y & + & z & - & t & = & 0 \\ 2\,x & + & y & - & z & + & 2\,t & = & 0 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2\,x & + & y & - & 3\,z & + & t & + & u & = & 4 \\ x & - & 2\,y & - & z & + & 3\,t & - & u & = & 1 \\ 3\,x & - & y & + & 4\,z & - & t & - & 3\,u & = & -6 \\ x & + & y & + & z & + & t & + & u & = & 15 \\ 5\,x & - & 4\,y & + & 3\,z & - & 2\,t & + & u & = & 3 \end{array}\right.$

Matrice d'un système linéaire

Exemple 1.10 Un système d'équations peut se noter sous la forme d'un tableau de nombres. Illustrons cette idée par un exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 6\,z & = & 25 \\ 2\,x & + & 7\,y & + & 14\,z & = & 58 \\ & & 2\,y & + & 5\,z & = & 19 \end{array}\right. \quad \text{se transcrit en} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 7 & 14 & 58 \\ 0 & 2 & 5 & 19 \end{array}\right).$$

Pour introduire un peu de terminologie, on appelle :

— **matrice** du système, le tableau des coefficients des variables : $\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\2 & 7 & 14\\0 & 2 & 5\end{pmatrix}$;

— **matrice augmentée** du système, ce même tableau auquel sont ajoutés les termes constants : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 7 & 14 & 58 \\ 0 & 2 & 5 & 19 \end{array}\right)$.

Appliquons la méthode du pivot de Gauss avec cette nouvelle notation :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 7 & 14 & 58 \\ 0 & 2 & 5 & 19 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - 2\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 25 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 19 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - 2\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 25 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

La dernière matrice obtenue est dite **échelonnée**.

Plus généralement, une matrice est **échelonnée** si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne, que l'on appelle un **pivot**, augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.

Exemple 1.11 Voici des matrices échelonnées où les pivots ont été encerclés :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Revenons à notre système d'équations que nous n'avions pas fini de résoudre :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 25 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to L_1 - 6\,L_3 \\ L_2 \to L_2 - 2\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 - 3\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

On obtient alors une matrice **échelonnée réduite**, c'est-à-dire une matrice échelonnée dont chaque pivot vaut 1 et dont toute colonne contenant un pivot contient partout ailleurs des zéros.

Exemple 1.12 Voici des matrices échelonnées réduites :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre un système d'équations par la méthode du pivot de Gauss équivaut ainsi à transformer la matrice de ce système en une matrice échelonnée réduite.

Si l'on revient à l'exemple 1.10 qui nous a guidé jusqu'ici, on conclut :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Remarque : les variables dont la colonne ne contient pas de pivot sont libres.

Exemple 1.13 Illustrons cette dernière remarque par la résolution d'un système d'équations, en réduisant sa matrice à une forme échelonnée réduite.

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 + 3\,x_4 = 2 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 - 3\,x_3 + 4\,x_4 = 5 \\ 5\,x_1 + 10\,x_2 - 8\,x_3 + 11\,x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5\,L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - 2\,L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 + 2\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Puisqu'il n'y a pas de pivot dans les 2^e^ et 4^e^ colonnes, les variables x_2 et x_4 sont libres. On commence donc par poser : $\begin{cases} x_1 = & \\ x_2 = \alpha & \\ x_3 = & \\ x_4 = & \beta \end{cases}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La matrice échelonnée réduite permet facilement de compléter les solutions :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 + 2\,\alpha \quad - \quad \beta = 4 \\ \qquad\qquad x_3 - 2\,\beta = 1 \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2\,\alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 1 + 2\,\beta \\ x_4 = \beta \end{cases} \iff \mathrm{S} = \Big\{(4 - 2\,\alpha + \beta\,;\alpha\,;1 + 2\,\beta\,;\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\Big\}$$

Bien qu'on ne puisse pas représenter visuellement l'espace $\mathbb{R}^4$ à 4 dimensions, on peut tout de même interpréter géométriquement cet ensemble de solutions, en disant qu'il s'agit du plan passant par le point $(4\,;0\,;1\,;0)$ et admettant pour vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.6 Résoudre les systèmes suivants en échelonnant leur matrice augmentée :

1) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ x - 2\,y - 3\,z = 10 \\ 5\,x + 6\,y + z = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + 2\,y + 3\,z = 14 \\ 3\,x + 2\,y + z = 22 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 + 4\,x_4 = 1 \\ 3\,x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ 3\,x_1 - 4\,x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 8 \\ -2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 + 3\,x_4 = 6 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 + x_4 + 2\,x_5 = 8 \\ x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_4 - 5\,x_5 = 1 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 - 3\,x_5 = -1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3\,x_1 - 3\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 - 9\,x_5 = 13 \\ x_1 - x_2 + 2\,x_3 - x_4 - 6\,x_5 = -6 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 6\,x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2\,x_4 + 7\,x_5 = -3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2\,x_4 - 5\,x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + 4\,x_3 + 2\,x_4 + 4\,x_5 = 13 \\ -2\,x_1 + 2\,x_2 - 5\,x_3 - x_4 - 3\,x_5 = -1 \end{cases}$

1.7 Déterminer la valeur de k pour laquelle le système $\begin{cases} 2\,x - y - 4\,z = k \\ -x + y + 2\,z = k \\ -x + y + k\,z = k \end{cases}$ est consistant, puis le résoudre.

1.8 Pour quelles valeurs de k, les systèmes suivants ont-ils (a) aucune solution, (b) une solution unique, (c) une infinité de solutions ?

1) $\begin{cases} x + k\,y = 1 \\ k\,x + y = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} k\,x + 2\,y = 3 \\ 2\,x - 4\,y = -6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - 2\,y + 3\,z = 2 \\ x + y + z = k \\ 2\,x - y + 4\,z = k^2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + k\,z = 1 \\ x + k\,y + z = 1 \\ k\,x + y + z = -2 \end{cases}$

Remarque : on ne demande pas de donner de solutions.

1.9 Un ami, féru de devinettes, me demande de retrouver le poids de 4 objets, après m'avoir indiqué :

— le poids des objets 1 et 2 pris ensemble ;

— le poids des objets 2 et 3 pris ensemble ;

— le poids des objets 3 et 4 pris ensemble ;

— le poids des objets 4 et 1 pris ensemble.

Vais-je pouvoir résoudre son énigme ?

Réponses

1.1 1) $\mathrm{S} = \Big\{(3\,;-1)\Big\}$

2) $\mathrm{S} = \varnothing$

3) $\mathrm{S} = \Big\{(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\,\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(-3\,\alpha\,;1 + 2\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$

4) $\mathrm{S} = \Big\{(-1 + 2\,\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$

5) $\mathrm{S} = \Big\{(5\,;-8)\Big\}$

6) $\mathrm{S} = \Big\{(-\frac{17}{3} - \frac{4}{3}\,\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(-7 - 4\,\alpha\,;1 + 3\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$

1.2 1) $\mathrm{S} = \Big\{(1\,;2\,;3)\Big\}$

2) $\mathrm{S} = \Big\{(1-\alpha\,;-2+\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$

3) $\mathrm{S} = \varnothing$

4) $\mathrm{S} = \Big\{(7\,;-2\,;2)\Big\}$

5) $\mathrm{S} = \Big\{(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\,\alpha-\frac{1}{2}\,\beta\,;\alpha\,;\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\Big\}$
$= \Big\{(1+3\,\alpha-\beta\,;1+2\,\alpha\,;2\,\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\Big\}$

6) $\mathrm{S} = \Big\{(4-2\,\alpha\,;\alpha\,;1) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$

1.3 $5\,a-2\,b-c=0$; le système ne peut pas avoir de solution unique.

1.4 1) $k=-3$ 2) $k \neq -3$ et $k \neq 2$ 3) $k=2$

1.5 1) $\mathrm{S} = \Big\{(1\,;-1\,;2\,;3)\Big\}$

2) $\mathrm{S} = \Big\{(2\,\alpha-5\,\beta\,;3\,\alpha-4\,\beta\,;7\,\alpha\,;7\,\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\Big\}$.

3) $\mathrm{S} = \{(1\,;2\,;3\,;4\,;5)\}$

1.6 1) $\mathrm{S} = \Big\{(3\,;-2\,;-1)\Big\}$

2) $\mathrm{S} = \Big\{(4+\alpha\,;5-2\,\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$

3) $\mathrm{S} = \Big\{(1-\alpha\,;2-2\,\alpha\,;7-4\,\alpha\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$

4) $\mathrm{S} = \varnothing$

5) $\mathrm{S} = \Big\{(3\,;5\,;-2\,;1\,;3)\Big\}$

6) $\mathrm{S} = \Big\{(2+\alpha+3\,\beta\,;\alpha\,;-3+2\,\beta\,;2+\beta\,;\beta) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\Big\}$

7) $\mathrm{S} = \Big\{(-15+\alpha+2\,\beta\,;\alpha\,;5-\beta\,;\beta\,;2) : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\Big\}$

1.7 Si $k=2$, alors $\mathrm{S} = \Big\{(4+2\,\alpha\,;6\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\Big\}$.

1.8

1)	(a) $k=-1$	(b) $k \neq \pm 1$	(c) $k=1$
2)	(a) jamais	(b) $k \neq -1$	(c) $k=-1$
3)	(a) $k \neq -1$ et $k \neq 2$	(b) jamais	(c) $k=-1$ ou $k=2$
4)	(a) $k=1$	(b) $k \neq -2$ et $k \neq 1$	(c) $k=-2$