1.8 1) $\begin{cases} x + k\,y = 1 \\ k\,x + y = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - k\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & (1-k)\,(1+k) & 1-k \end{array}\right)$$

— Si $k = 1$, alors la dernière équation devient $0 = 0$: la variable y est libre et le système possède une infinité de solutions.

— Si $k = -1$, alors la dernière équation devient $0 = 2$: elle est impossible et le système n'admet aucune solution.

— Si $k \neq 1$ et $k \neq -1$, alors il y a deux pivots : le système possède une solution unique.

2) $\begin{cases} k\,x + 2\,y = 3 \\ 2\,x - 4\,y = -6 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow 1/2\,L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ k & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 - k\,L_1}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2+2\,k & 3+3\,k \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2\,(1+k) & 3\,(1+k) \end{array}\right)$$

— Si $k = -1$, alors la dernière équation devient $0 = 0$: la variable y est libre et le système possède une infinité de solutions.

— Si $k \neq -1$, alors il y a deux pivots : le système possède une solution unique.

3) $\begin{cases} x - 2\,y + 3\,z = 2 \\ x + y + z = k \\ 2\,x - y + 4\,z = k^2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 2 & -1 & 4 & k^2 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2\,L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & k-2 \\ 0 & 3 & -2 & k^2-4 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k+2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & (k+1)\,(k-2) \end{array}\right)$$

— Si $k = -1$ ou $k = 2$, alors la dernière équation devient $0 = 0$: la variable z est libre et le système possède une infinité de solutions.

— Si $k \neq -1$ et $k \neq 2$, alors la dernière équation devient impossible et le système n'admet aucune solution.

4) $\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = -2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - k\,L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & -2-k \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & -k^2-k+2 & -2-k \end{array}\right) \overset{L_3 \to -L_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{k^2+k-2}_{(k+2)\,(k-1)} & k+2 \end{array}\right)$$

- Si $k = -2$, alors la dernière équation devient $0 = 0$: la variable z est libre et le système possède une infinité de solutions.
- Si $k = 1$, alors la dernière équation devient $0 = 3$: elle est impossible et le système n'admet aucune solution.
- Si $k \neq -2$ et $k \neq 1$, alors le système possède trois pivots et donc une solution unique.