

2 Familles génératrices, Familles libres & Bases

Combinaisons linéaires de vecteurs

Exemple 2.1 Résolvons le système $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ -3x + 9y - 6z = 0 \end{cases}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 9 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On trouve ainsi : $\begin{cases} x = 3\alpha - 2\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

En notant la solution sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on

l'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Plus généralement, un vecteur $\mathbf{v}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ s'il existe des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Revenons à notre exemple pour illustrer cette notion.

1) Se demander si le vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ fait partie des solutions du système

d'équations équivaut à se demander si le vecteur $\mathbf{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$, puisqu'il s'agit de résoudre :

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \iff \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3\alpha - 2\beta = 5 \\ \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Prêtez attention aux colonnes de la matrice augmentée correspondante :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -1/2 L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire } \alpha = 3 \text{ et } \beta = 2.$$

En d'autres termes, $\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ est bien une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et fait donc partie des solutions du système.

2) Posons-nous la même question avec le vecteur $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{w} \iff \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3\alpha - 2\beta = 6 \\ \alpha = 4 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

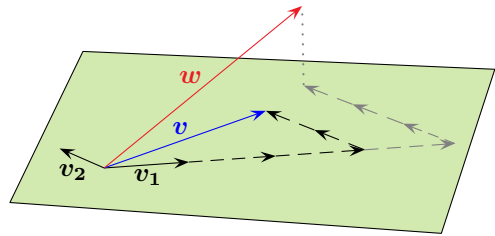
$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow -1/2 L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \text{ qui est impossible.}$$

Cela signifie que le vecteur $\mathbf{w}$ ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et n'est pas une solution du système.

Illustrons géométriquement cet exemple.

Toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ engendrent le plan contenant ces deux vecteurs. On a trouvé que le vecteur $\mathbf{v}$ appartient à ce plan, tandis que le vecteur $\mathbf{w}$ n'en fait pas partie.



2.1 Le vecteur $\mathbf{v}$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$?

1) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 Le vecteur $\mathbf{v}$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$?

1) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 32 \\ 20 \\ -26 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 48 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 34 \\ 14 \\ -64 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

Familles génératrices

On note $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$:

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = \left\{ \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

On l'appelle le **sous-espace engendré** par $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$.

Lorsque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ engendrent tous les vecteurs de l'espace, on dit qu'ils forment une **famille génératrice**.

Exemple 2.2 Montrons que $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathbb{R}^2$.

Il s'agit de montrer que $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

En d'autres termes, on doit montrer qu'on peut toujours trouver, quels que soient les valeurs de x et y , des coefficients α et β tels que :

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Écrivons la matrice augmentée de ce système et résolvons-le :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ -1 & 3 & y \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & y \\ 2 & 1 & x \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & y \\ 0 & 7 & x + 2y \end{array} \right)$$

On pourrait déjà s'arrêter à ce stade : vu que la matrice du système est échelonnée et que l'on a deux pivots, on sait qu'on trouvera une solution unique pour α et β . Poursuivons tout de même pour expliciter cette solution :

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow 7L_1 - 3L_2} \left(\begin{array}{cc|c} -7 & 0 & -3x + y \\ 0 & 7 & x + 2y \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow -1/7 L_1 \\ L_2 \rightarrow 1/7 L_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3x-y}{7} \\ 0 & 1 & \frac{x+2y}{7} \end{array} \right)$$

On constate ainsi que n'importe quel vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit bien comme comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\underbrace{\frac{3x-y}{7}}_{\alpha} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{x+2y}{7}}_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple 2.3 Est-ce que les vecteurs $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathbb{R}^3$? Est-ce qu'on peut trouver des coefficients α , β et γ tels que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

pour n'importe quelles valeurs de x , y et z ?

Écrivons la matrice augmentée de ce système et résolvons-le :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x \\ -1 & 4 & 1 & y \\ -1 & 2 & -1 & z \end{array} \right) \xrightarrow[\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 + \text{L}_1]{\text{L}_2 \rightarrow \text{L}_2 + \text{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x \\ 0 & 5 & 5 & x+y \\ 0 & 3 & 3 & x+z \end{array} \right) \xrightarrow{\text{L}_3 \rightarrow 5\text{L}_3 - 3\text{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x \\ 0 & 5 & 5 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & 2x-3y+5z \end{array} \right)$$

La dernière ligne nous permet de tirer deux constats.

- 1) Le système est impossible si $2x - 3y + 5z \neq 0$.

Cela signifie que l'on ne peut pas exprimer n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$.

Les vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ ne forment donc pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- 2) Le système admet une solution, à la condition que $2x - 3y + 5z = 0$.

En d'autres termes, l'espace engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ est, non l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais seulement le plan d'équation $2x - 3y + 5z = 0$.

2.3 Montrer que les familles suivantes engendrent $\mathbb{R}^2$:

1) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.4 Montrer que les familles suivantes engendrent $\mathbb{R}^3$:

1) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.5 Déterminer l'espace engendré par les familles de vecteurs suivantes :

1) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 4) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix}$ 6) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Familles libres

Exemple 2.4 Exprimons le vecteur $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il s'agit de trouver des coefficients α_1 , α_2 et α_3 tels que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Écrivons la matrice augmentée de ce système pour le résoudre :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 2 & 4 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \rightarrow -L_1 \\ L_2 \rightarrow 1/2 L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & | & -5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Comme la variable α_3 est libre, on trouve une infinité de solutions :

$$(-1 + \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (4 - 2\alpha_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

quelle que soit la valeur de $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Donnons quelques cas particuliers :

- si $\alpha_3 = 0$, alors $-\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$;
- si $\alpha_3 = 1$, alors $2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$;
- si $\alpha_3 = 2$, alors $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$.

On constate que seulement deux des trois vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ suffisent pour engendrer le vecteur $\mathbf{v}$. Cette Redondance tient au fait que l'on peut exprimer l'un des vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ou $\mathbf{v}_3$ comme combinaison linéaire des deux autres :

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$$

On exprime plus simplement ces trois relations par l'unique égalité

$$\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

On dit, dans une telle situation, que les vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont linéairement dépendants, ou encore qu'ils forment une famille liée.

Plus généralement, on dit que des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sont **linéairement dépendants**, ou qu'ils forment une **famille liée**, s'il existe des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *non tous nuls* tels que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Ainsi les vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ de l'exemple 2.3 sont linéairement dépendants, car ils vérifient $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

La dépendance linéaire explique pourquoi

- à l'exemple 2.3, les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ne suffisent pas à engendrer $\mathbb{R}^3$;
- à l'exemple 2.4, il y a une infinité de combinaisons linéaires possibles.

Au contraire, on dit que des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sont **linéairement indépendants**, ou qu'ils forment une **famille libre**, si les seuls coefficients possibles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pour que soit vérifiée l'égalité

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

sont tous nuls : $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

Exemple 2.5 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-ils une famille libre ?

Il s'agit de déterminer quelles sont les solutions de l'égalité

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réolvons cette équation à l'aide de la matrice augmentée correspondante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

La matrice échelonnée montre qu'il y a trois pivots pour trois inconnues, si bien qu'il y a manifestement une unique solution, la solution évidente $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 0$. Si l'on n'est toujours pas convaincu, réduisons la matrice :

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow 1/2 L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

On conclut que les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont linéairement indépendants et forment une famille libre.

Exemple 2.6 La famille $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-elle libre ?

À nouveau, il faut trouver les solutions de l'égalité

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recourons à la matrice augmentée correspondante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Puisque la variable α_3 est libre, il y a une infinité de solutions.

Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont linéairement dépendants ($\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$) et forment par conséquent une famille liée.

2.6 Les familles suivantes de vecteurs sont-elles libres ou liées ?

1) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.7 Les familles suivantes de vecteurs sont-elles libres ou liées ?

1) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.8 Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sont libres et qu'ils engendrent le même espace que les vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2.9 1) Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour quelle valeur de m forment-ils une famille liée ?

2) Même question avec les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bases

Une famille à la fois génératrice et libre s'appelle une **base**.

Si la famille $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ est une base, alors l'équation

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

possède exactement une solution.

L'existence d'au moins une solution vient de ce que la famille est génératrice ;
l'existence d'au plus une solution est due au fait que la famille est libre.

Exemple 2.7

1) (a) Tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ vérifie $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(b) L'équation $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour matrice augmentée $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$.

La famille $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre $\mathbb{R}^2$ et est manifestement libre.

Elle constitue la **base canonique** de $\mathbb{R}^2$.

2) (a) Tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifie $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(b) La matrice augmentée de $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$.

La famille $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre $\mathbb{R}^3$ et est libre.

Elle forme la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.

3) (a) Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(b) L'équation $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ possède pour matrice

augmentée la matrice échelonnée réduite $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right).$

La famille $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre $\mathbb{R}^n$ et est libre.

Elle constitue la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.8 La famille $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Cherchons à exprimer un vecteur quelconque $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Cherchons donc des coefficients α et β tels que :

$$\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si l'on écrit la matrice augmentée de ce système, il s'agit de résoudre :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & y \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -2x + y \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3x - y \\ 0 & 1 & -2x + y \end{array} \right)$$

Avoir trouvé au moins une solution signifie que la famille est génératrice.

Avoir trouvé seulement une solution signifie que la famille est libre.

On conclut que la famille $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^2$.

2.10 Les familles suivantes forment-elles une base de $\mathbb{R}^3$?

$$1) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 2) \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : l'exercice 2.4 1) et l'exemple 2.5 raccourcissent grandement la question 1).

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

Dimension

Les exemples 2.7 et 2.8, ainsi que les exercices 2.10 et 2.11, illustrent abondamment le fait qu'un même espace peut avoir bien des bases différentes.

Théorème 2.1 *Toutes les bases d'un même espace contiennent le même nombre de vecteurs, que l'on appelle sa **dimension**.*

Preuve : Soient $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ et $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ deux bases d'un même espace. Il s'agit de prouver que $m = n$, ce que nous allons faire en montrant qu'il est impossible que $m < n$ ou que $m > n$.

Supposons que $m < n$.

Nous allons montrer que cela entraîne que la famille $\mathcal{B}_2$ est liée. Pour cela, considérons une combinaison linéaire telle que :

$$\beta_1 \mathbf{w}_1 + \beta_2 \mathbf{w}_2 + \dots + \beta_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0} \quad (1)$$

Puisque $\mathcal{B}_1$ est une base, nous pouvons écrire chacun des vecteurs $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$:

$$\begin{array}{rclclcl} \mathbf{w}_1 & = & \alpha_{1,1} \mathbf{v}_1 & + & \alpha_{1,2} \mathbf{v}_2 & + & \dots & + & \alpha_{1,m} \mathbf{v}_m \\ \mathbf{w}_2 & = & \alpha_{2,1} \mathbf{v}_1 & + & \alpha_{2,2} \mathbf{v}_2 & + & \dots & + & \alpha_{2,m} \mathbf{v}_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{w}_n & = & \alpha_{n,1} \mathbf{v}_1 & + & \alpha_{n,2} \mathbf{v}_2 & + & \dots & + & \alpha_{n,m} \mathbf{v}_m \end{array} \quad (2)$$

En substituant les équations (2) dans l'équation (1), on obtient :

$$\beta_1 (\alpha_{1,1} \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{1,m} \mathbf{v}_m) + \beta_2 (\alpha_{2,1} \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{2,m} \mathbf{v}_m) + \dots + \beta_n (\alpha_{n,1} \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{n,m} \mathbf{v}_m) = \mathbf{0}$$

En réordonnant les termes, nous arrivons à ceci :

$$\begin{aligned} & (\alpha_{1,1} \beta_1 + \alpha_{2,1} \beta_2 + \dots + \alpha_{n,1} \beta_n) \mathbf{v}_1 + (\alpha_{1,2} \beta_1 + \alpha_{2,2} \beta_2 + \dots + \alpha_{n,2} \beta_n) \mathbf{v}_2 \\ & + \dots + (\alpha_{1,m} \beta_1 + \alpha_{2,m} \beta_2 + \dots + \alpha_{n,m} \beta_n) \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Comme la famille $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ est libre, chaque parenthèse doit être nulle :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1} \beta_1 + \alpha_{2,1} \beta_2 + \dots + \alpha_{n,1} \beta_n = 0 \\ \alpha_{1,2} \beta_1 + \alpha_{2,2} \beta_2 + \dots + \alpha_{n,2} \beta_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{1,m} \beta_1 + \alpha_{2,m} \beta_2 + \dots + \alpha_{n,m} \beta_n = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi un système de m équations à n inconnues $\beta_1, \dots, \beta_n$.

Si $m < n$, il y aura au moins une variable libre, c'est-à-dire une infinité de solutions à l'équation (1). On a ainsi montré que l'hypothèse $m < n$ entraîne la conclusion absurde que la famille $\mathcal{B}_2$ est liée.

Supposons que $m > n$.

Un raisonnement similaire, où l'on intervertit le rôle des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, conduit à la contradiction que la famille $\mathcal{B}_1$ est liée.

La seule possibilité est par conséquent que $m = n$, ce qui prouve la proposition.

Exemple 2.9 Vu l'exemple 2.7, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

2.12 Expliquer pourquoi les familles suivantes ne peuvent pas former une base.

1) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

2.13 Les familles suivantes forment-elles une base de $\mathbb{R}^3$?

1) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 2) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$

2.14 Pour quelle valeur de k la famille $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Réponses

2.1 1) oui : $\mathbf{v} = -5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$
3) non

2) non
4) oui : $\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

2.2 1) oui : $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$

2) oui : $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$

2.3 1) $\frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2) $\frac{x}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2x+3y}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$2.4 \quad 1) \frac{x-y+z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x+y-z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-x+y+z}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$2) \frac{-5x+7y-3z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x-y+z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3x-3y+z}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.5 1) Droite, dans le plan $\mathbb{R}^2$, d'équation $2x + y = 0$.

2) Droite, dans le plan $\mathbb{R}^2$, d'équation $-4x + 3y = 0$.

3) Plan, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, d'équation $2x - y + 4z = 0$.

4) Plan, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, d'équation $x + y + z = 0$.

5) Droite, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, d'équations $\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$.

6) Plan, dans l'espace $\mathbb{R}^4$, d'équations $\begin{cases} -17x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 0 \\ 17x_1 - 2x_2 + 7x_4 = 0 \end{cases}$.

2.6 1) liée : $4\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ 2) libre

3) liée : $13\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 - 45\mathbf{v}_3 + 37\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$

2.7 1) libre 2) libre

3) liée : $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$

$$2.8 \quad \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Chaque paire de vecteurs engendre le plan d'équation $2x + y - 2z = 0$.

2.9 1) $m = \frac{2}{5}$ 2) $m = 1$ ou $m = 6$

2.10 1) oui 2) non, car $-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$

2.12 1) Toute base de $\mathbb{R}^2$ doit contenir 2 vecteurs. La famille $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ est donc liée.

2) La famille est évidemment liée : $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

Pour cette raison, une base ne peut jamais contenir le vecteur nul.

3) La famille est linéairement dépendante, vu que $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_1$.

4) Toute base de $\mathbb{R}^5$ doit contenir 5 vecteurs. La famille n'est pas génératrice.

2.13 1) La famille ne saurait être génératrice, il n'y a pas assez de vecteurs.

2) La famille est liée : $2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

3) La famille est nécessairement liée : il y a trop de vecteurs.

2.14 $k \neq -4$