2.1 1) $\alpha\,\boldsymbol{v_1}+\beta\,\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{v} \iff \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\alpha+2\,\beta=1\\-\alpha-\beta=2\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\-1&-1&2\end{array}\right) \xRightarrow{L_2\to L_2+L_1} \left(\begin{array}{cc|c}1&2&1\\0&1&3\end{array}\right) \xRightarrow{L_1\to L_1-2\,L_2} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&-5\\0&1&3\end{array}\right)$$

$\boldsymbol{v}=-5\,\boldsymbol{v_1}+3\,\boldsymbol{v_2}$ est bien une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$.

2) $\alpha\,\boldsymbol{v_1}+\beta\,\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{v} \iff \alpha\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}4\,\alpha-2\,\beta=2\\-2\,\alpha+\beta=1\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}4&-2&2\\-2&1&1\end{array}\right) \xRightarrow{L_2\to 2\,L_2+L_1} \left(\begin{array}{cc|c}4&-2&2\\0&0&4\end{array}\right)$$

Ce système est impossible : le vecteur $\boldsymbol{v}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$.

3) $\alpha\,\boldsymbol{v_1}+\beta\,\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{v} \iff \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\alpha=1\\\alpha+\beta=2\\\beta=3\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\1&1&2\\0&1&3\end{array}\right) \xRightarrow{L_2\to L_2-L_1} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\0&1&3\end{array}\right) \xRightarrow{L_3\to L_3-L_2} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{array}\right)$$

Ce système est impossible : le vecteur $\boldsymbol{v}$ ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$.

4) $\alpha\,\boldsymbol{v_1}+\beta\,\boldsymbol{v_2}=\boldsymbol{v} \iff \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\alpha=3\\\alpha+\beta=2\\\beta=-1\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&3\\1&1&2\\0&1&-1\end{array}\right) \xRightarrow{L_2\to L_2-L_1} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&-1\\0&1&-1\end{array}\right) \xRightarrow{L_3\to L_3-L_2} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right)$$

$\boldsymbol{v}=3\,\boldsymbol{v_1}-\boldsymbol{v_2}$ est bien une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$.