2.10 1) Cherchons à exprimer un vecteur quelconque $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$. En d'autres termes, cherchons des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que :

$$\alpha_1\,\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\,\boldsymbol{v_2} + \alpha_3\,\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v} \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & -x+y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 2 & -x+y+z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to -2\,\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & x-y+z \\ 0 & 0 & 2 & -x+y+z \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{L}_1 \to 2\,\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x+y-z \\ 0 & 2 & 0 & x-y+z \\ 0 & 0 & 2 & -x+y+z \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 1/2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 1/2\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{x+y-z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-y+z}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-x+y+z}{2} \end{array}\right)$$

Avoir trouvé au moins une solution signifie que la famille est génératrice.
Avoir trouvé seulement une solution signifie que la famille est libre.
On conclut que la famille $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Cherchons à exprimer un vecteur quelconque $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$. En d'autres termes, cherchons des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que :

$$\alpha_1\,\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\,\boldsymbol{v_2} + \alpha_3\,\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v} \iff \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ -1 & 5 & -3 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 4 & -2 & x+y \\ 0 & 4 & -2 & -3\,x+z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 4 & -2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & -4\,x-y+z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 4\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 5\,x+y \\ 0 & 4 & -2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & -4\,x-y+z \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/4\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 1/4\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5\,x+y}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{x+y}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -4\,x-y+z \end{array}\right)$$

La famille $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ n'est pas génératrice : au lieu d'engendrer la totalité de $\mathbb{R}^3$, elle n'engendre que le plan d'équation $-4\,x - y + z = 0$.

La famille $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ est liée : pour autant que la condition $-4\,x - y + z = 0$ soit satisfaite, il existe une infinité de solutions :

$$\begin{cases} \alpha_1 & = \frac{5\,x+y}{4} - \frac{1}{2}\,\alpha \\ \quad \alpha_2 & = \frac{x+y}{4} + \frac{1}{2}\,\alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \\ \qquad \alpha_3 & = \alpha \end{cases}$$

En particulier, avec $x = y = z = 0$ et $\alpha = 2$, on obtient :

$$-\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} + 2\,\boldsymbol{v_3} = \mathbf{0}$$