2.11 Cherchons à exprimer un vecteur quelconque $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$. En d'autres termes, cherchons des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tels que :

$$\alpha_1\,\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\,\boldsymbol{v_2} + \alpha_3\,\boldsymbol{v_3} + \alpha_4\,\boldsymbol{v_4} = \boldsymbol{v} \iff$$
$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 6 & 1 & -8 & 0 & x_2 \\ 3 & -1 & -12 & -1 & x_3 \\ -6 & 0 & -4 & 2 & x_4 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 + 2\,\mathrm{L}_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -2\,x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & -12 & -2 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 2\,x_1 + x_4 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -2\,x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -20 & -4 & -3\,x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 2\,x_1 + x_4 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -2\,x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 2\,x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & -20 & -4 & -3\,x_1 + x_2 + x_3 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_4 \to \mathrm{L}_4 - 5\,\mathrm{L}_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & -2\,x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 2\,x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & -13\,x_1 + x_2 + x_3 - 5\,x_4 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to 24\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_4 \\ \mathrm{L}_2 \to 12\,\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_4 \\ \mathrm{L}_3 \to 6\,\mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 72 & 0 & 0 & 0 & 11\,x_1 + x_2 + x_3 - 5\,x_4 \\ 0 & 12 & -96 & 0 & -11\,x_1 + 11\,x_2 - x_3 + 5\,x_4 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & -13\,x_1 + x_2 + x_3 - 5\,x_4 \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 4\,\mathrm{L}_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 72 & 0 & 0 & 0 & 11\,x_1 + x_2 + x_3 - 5\,x_4 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & -7\,x_1 + 7\,x_2 - 5\,x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & -24 & 0 & -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & -13\,x_1 + x_2 + x_3 - 5\,x_4 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/72 \\ \mathrm{L}_2 \to 1/12 \\ \mathrm{L}_3 \to -1/24 \\ \mathrm{L}_4 \to -1/24\,\mathrm{L}_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{11\,x_1 + x_2 + x_3 - 5\,x_4}{72} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-7\,x_1 + 7\,x_2 - 5\,x_3 + x_4}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{x_1 - x_2 - x_3 - x_4}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{13\,x_1 - x_2 - x_3 + 5\,x_4}{24} \end{array}\right)$$

Avoir trouvé au moins une solution signifie que la famille est génératrice.

Avoir trouvé seulement une solution signifie que la famille est libre.
On conclut que la famille $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^4$.