2.3 1) Soit $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$.

On doit montrer que, quelles que soient les valeurs de x et y, le vecteur $\boldsymbol{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$, c'est-à-dire qu'il existe des coefficients α et β tels que :

$$\alpha\,\boldsymbol{v_1} + \beta\,\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v} \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -x+y \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 2\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x+y \\ 0 & -2 & -x+y \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -1/2\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{2} \end{array}\right)$$

N'importe quel vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$:

$$\underbrace{\tfrac{x+y}{2}}_{\alpha}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\tfrac{x-y}{2}}_{\beta}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La famille $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ engendrent bien $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$.

On doit montrer que, quelles que soient les valeurs de x et y, le vecteur $\boldsymbol{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$, c'est-à-dire qu'il existe des coefficients α et β tels que :

$$\alpha\,\boldsymbol{v_1} + \beta\,\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v} \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x \\ -2 & 1 & y \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & x \\ 0 & 3 & 2\,x+3\,y \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/3\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 1/3\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2\,x+3\,y}{3} \end{array}\right)$$

N'importe quel vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$:

$$\underbrace{\tfrac{x}{3}}_{\alpha}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \underbrace{\tfrac{2\,x+3\,y}{3}}_{\beta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La famille $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ engendrent bien $\mathbb{R}^2$.