2.4 1) Soit $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

On doit montrer que, quelles que soient les valeurs de x, y et z, le vecteur $\boldsymbol{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{v_3}$, c'est-à-dire qu'il existe des coefficients α, β et γ tels que :

$$\alpha\,\boldsymbol{v_1} + \beta\,\boldsymbol{v_2} + \gamma\,\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v} \iff \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & -x+z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & -x+y+z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & x+y-z \\ 0 & 0 & 2 & -x+y+z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 2\,\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x-y+z \\ 0 & 2 & 0 & x+y-z \\ 0 & 0 & 2 & -x+y+z \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to 1/2\,\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \to 1/2\,\mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{x-y+z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x+y-z}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-x+y+z}{2} \end{array}\right)$$

N'importe quel vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{v_3}$:

$$\underbrace{\tfrac{x-y+z}{2}}_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\tfrac{x+y-z}{2}}_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\tfrac{-x+y+z}{2}}_{\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La famille $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{v_3}$ engendrent bien $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

On doit montrer que, quelles que soient les valeurs de x, y et z, le vecteur $\boldsymbol{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{v_3}$, c'est-à-dire qu'il existe des coefficients α, β et γ tels que :

$$\alpha\,\boldsymbol{v_1} + \beta\,\boldsymbol{v_2} + \gamma\,\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v} \iff \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 0 & 3 & -1 & z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & -x+y \\ 0 & 3 & -1 & z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 3\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & -x+y \\ 0 & 0 & 2 & 3\,x-3\,y+z \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2\,x+3\,y-z \\ 0 & 2 & 0 & x-y+z \\ 0 & 0 & 2 & 3\,x-3\,y+z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 2\,\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -5\,x+7\,y-3\,z \\ 0 & 2 & 0 & x-y+z \\ 0 & 0 & 2 & 3\,x-3\,y+z \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 1/2\,L_1 \\ L_2 \to 1/2\,L_2 \\ L_3 \to 1/2\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-5\,x+7\,y-3\,z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-y+z}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3\,x-3\,y+z}{2} \end{array}\right)$$

N'importe quel vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{v_3}$:

$$\underbrace{\tfrac{-5\,x+7\,y-3\,z}{2}}_{\alpha}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \underbrace{\tfrac{x-y+z}{2}}_{\beta}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \underbrace{\tfrac{3\,x-3\,y+z}{2}}_{\gamma}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

La famille $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{v_3}$ engendrent bien $\mathbb{R}^3$.