2.5 1) Déterminons à quelle condition le système suivant admet des solutions :

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ -4 & 2 & y \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & 0 & 2\,x + y \end{array}\right)$$

L'espace engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$ est non l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier, mais seulement la droite d'équation $2\,x + y = 0$.

2) Déterminons à quelle condition le système suivant admet des solutions :

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & x \\ 0 & 4 & y \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 - 4\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & x \\ 0 & 0 & -4\,x + 3\,y \end{array}\right)$$

L'espace engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$ est non l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier, mais seulement la droite d'équation $-4\,x + 3\,y = 0$.

3) Déterminons à quelle condition le système suivant admet des solutions :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \\ 0 & -1 & z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & -2\,x + y \\ 0 & -1 & z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow -\mathrm{L}_3}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & -4 & -2\,x + y \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + 4\,\mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & -2\,x + y - 4\,z \end{array}\right)$$

L'espace engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$ est non l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais seulement le plan d'équation $-2\,x + y - 4\,z = 0$.

4) Déterminons à quelle condition le système suivant admet des solutions :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ -1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & -1 & 1 & x + z \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & x + y + z \end{array}\right)$$

L'espace engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ est non l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais seulement le plan d'équation $x+y+z=0$.

5) Déterminons à quelle condition le système suivant admet des solutions :

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-10\\-15\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&-10&x\\3&-15&y\\-4&20&z\end{array}\right)\overset{\substack{\mathrm{L}_2\to 2\,\mathrm{L}_2-3\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\to \mathrm{L}_3+2\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{cc|c}2&-10&x\\0&0&-3\,x+2\,y\\0&0&2\,x+z\end{array}\right)$$

L'espace engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$ est non l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais seulement la droite d'équations $\begin{cases}-3\,x+2\,y&=0\\ 2\,x+z&=0\end{cases}$.

6) Déterminons à quelle condition le système suivant admet des solutions :

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\-3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\8\\-3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&x_1\\-2&3&8&x_2\\5&1&-3&x_3\\-3&-4&-5&x_4\end{array}\right)\overset{\substack{\mathrm{L}_2\to \mathrm{L}_2+2\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\to \mathrm{L}_3-5\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_4\to \mathrm{L}_4+3\,\mathrm{L}_1}}{\Longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&x_1\\0&7&14&2\,x_1+x_2\\0&-9&-18&-5\,x_1+x_3\\0&2&4&3\,x_1+x_4\end{array}\right)\overset{\substack{\mathrm{L}_3\to 7\,\mathrm{L}_3+9\,\mathrm{L}_2\\ \mathrm{L}_4\to 7\,\mathrm{L}_4-2\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&x_1\\0&7&14&2\,x_1+x_2\\0&0&0&-17\,x_1+9\,x_2+7\,x_3\\0&0&0&17\,x_1-2\,x_2+7\,x_4\end{array}\right)$$

L'espace engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ est non l'espace $\mathbb{R}^4$ tout entier, mais seulement le plan d'équations $\begin{cases}-17\,x_1+9\,x_2+7\,x_3&=0\\ 17\,x_1-2\,x_2+7\,x_4&=0\end{cases}$.