2.8 Posons $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1) Montrons que la famille $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ est libre.

$$\alpha_1\,\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\,\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{0} \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to 1/2\,\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2]{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Il y a une solution unique : la famille $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ est libre.

2) Montrons que les vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ engendrent le même espace que les vecteurs $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}$.

Méthode 1

(a) Déterminons l'espace engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$.
Examinons à quelle condition le système suivant admet des solutions :

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 2 & 0 & z \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & -x + z \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & -x + z \\ 0 & 2 & y \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \leftrightarrow \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & 1 & -x + z \\ 0 & 0 & 2\,x + y - 2\,z \end{array}\right)$$

Les vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ engendrent, non pas $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais seulement le plan d'équation $2\,x + y - 2\,z = 0$.

(b) Déterminons l'espace engendré par les vecteurs $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}$.
Examinons à quelle condition le système suivant admet des solutions :

$$\alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & x \\ 6 & 12 & y \\ 7 & -2 & z \end{array}\right) \xRightarrow[\mathrm{L}_3 \to 4\,\mathrm{L}_3 - 7\,\mathrm{L}_1]{\mathrm{L}_2 \to 2\,\mathrm{L}_2 - 3\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & x \\ 0 & 48 & -3\,x + 2\,y \\ 0 & 48 & -7\,x + 4\,z \end{array}\right) \xRightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & x \\ 0 & 48 & -3\,x+2\,y \\ 0 & 0 & -4\,x-2\,y+4\,z \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_3 \leftrightarrow -1/2\,\mathrm{L}_3} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -8 & x \\ 0 & 48 & -3\,x+2\,y \\ 0 & 0 & 2\,x+y-2\,z \end{array}\right)$$

Les vecteurs $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}$ engendrent, non pas $\mathbb{R}^3$ tout entier, mais seulement le plan d'équation $2\,x+y-2\,z=0$.

On a vérifié que $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2\,x+y-2\,z=0 \right\}$.

Méthode 2

Montrons que les vecteurs $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}$ s'expriment comme des combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$.

(a) $\alpha\,\boldsymbol{v_1} + \beta\,\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{w_1} \iff \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2]{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On a trouvé : $\frac{7}{2}\,\boldsymbol{v_1} + 3\,\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{w_1}$.

(b) $\alpha\,\boldsymbol{v_1} + \beta\,\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{w_2} \iff \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - 2\,\mathrm{L}_2]{\mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_1 \to 1/2\,\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On a trouvé : $-\boldsymbol{v_1} + 6\,\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{w_2}$.

Si un vecteur $\boldsymbol{v}$ est engendré par les vecteurs $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}$, alors il existe des coefficients β_1, β_2 tels que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \beta_1\,\boldsymbol{w_1} + \beta_2\,\boldsymbol{w_2} \\ &= \beta_1 \left(\tfrac{7}{2}\,\boldsymbol{v_1} + 3\,\boldsymbol{v_2}\right) + \beta_2 \left(-\boldsymbol{v_1} + 6\,\boldsymbol{v_2}\right) \\ &= \tfrac{7}{2}\,\beta_1\,\boldsymbol{v_1} + 3\,\beta_1\,\boldsymbol{v_2} - \beta_2\,\boldsymbol{v_1} + 6\,\beta_2\,\boldsymbol{v_2} \\ &= \underbrace{\left(\tfrac{7}{2}\,\beta_1 - \beta_2\right)}_{\alpha_1} \boldsymbol{v_1} + \underbrace{\left(3\,\beta_1 + 6\,\beta_2\right)}_{\alpha_2} \boldsymbol{v_2} \end{aligned}$$

Cela signifie que le vecteur $\boldsymbol{v}$ est également engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$.