

2.9 1) La famille est liée si

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} m \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet une infinité de solutions.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 + \text{L}_1]{\text{L}_2 \rightarrow \text{L}_2 - 2\text{L}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 0 \\ 0 & -3 & -1 - 2m & | & 0 \\ 0 & 4 & 2 + m & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{L}_3 \rightarrow 3\text{L}_3 + 4\text{L}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 0 \\ 0 & -3 & -1 - 2m & | & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{3(2+m) + 4(-1-2m)}_{-5m+2} & | & 0 \end{pmatrix}$$

Si $m = \frac{2}{5}$, alors il y a une infinité de solutions : la famille est liée.

2) La famille est liée si

$$\alpha \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet une infinité de solutions.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & | & 0 \\ 2 & m & 2 & | & 0 \\ 1 & 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 - \text{L}_1]{\text{L}_2 \rightarrow \text{L}_2 - 2\text{L}_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & | & 0 \\ 0 & m - 4 & 2 - 2m & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 - m & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L}_2 \leftrightarrow \text{L}_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 - m & | & 0 \\ 0 & m - 4 & 2 - 2m & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{L}_3 \rightarrow \text{L}_3 - (m-4)\text{L}_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 - m & | & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{2 - 2m - (m-4)(1-m)}_{m^2 - 7m + 6 = (m-1)(m-6)} & | & 0 \end{pmatrix}$$

Si $m = 1$ ou $m = 6$, il y a une infinité de solutions : la famille est liée.