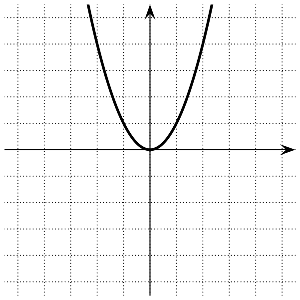
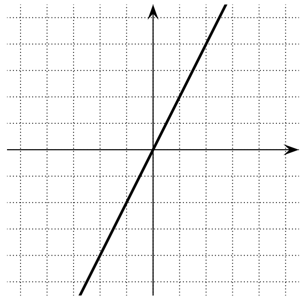
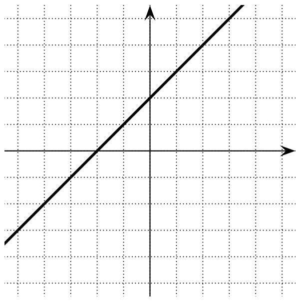
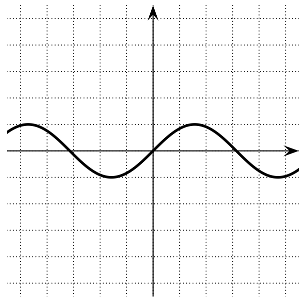
3 Applications linéaires

Parmi les graphes ci-dessous, lesquels représentent des fonctions linéaires ?

1)


2)


3)


4)


Graphiquement, on reconnaît une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme étant linéaire, au fait que son graphe doit être une droite passant par l'origine.

Les graphes 1) et 4) n'étant pas des droites sont écartés, tandis que le graphe 3) est également rejeté, car la droite ne passe pas par l'origine. Seul le graphe 2) représente bien une fonction linéaire.

Algébriquement, une fonction f est linéaire si elle satisfait ces deux propriétés :

(a) $f(v+w) = f(v) + f(w)$ (b) $f(\alpha\, v) = \alpha\, f(v)$

Illustrons cela avec les quatre fonctions représentées ci-dessus.

1) $f(x) = x^2$

(a) $\underbrace{(v+w)^2}_{f(v+w)} \neq \underbrace{v^2 + w^2}_{f(v)+f(w)}$

(b) $\underbrace{(\alpha\, v)^2}_{f(\alpha\, v)} \neq \underbrace{\alpha\, v^2}_{\alpha\, f(v)}$

2) $f(x) = 2\, x$

(a) $\underbrace{2\,(v+w)}_{f(v+w)} = \underbrace{2\, v + 2\, w}_{f(v)+f(w)}$

(b) $\underbrace{2\,(\alpha\, v)}_{f(\alpha\, v)} = \underbrace{\alpha\,(2\, v)}_{\alpha\, f(v)}$

3) $f(x) = x + 2$

(a) $\underbrace{(v+w)+2}_{f(v+w)} \neq \underbrace{(v+2)+(w+2)}_{f(v)+f(w)}$

(b) $\underbrace{\alpha\, v + 2}_{f(\alpha\, v)} \neq \underbrace{\alpha\,(v+2)}_{\alpha\, f(v)}$

4) $f(x) = \sin(x)$

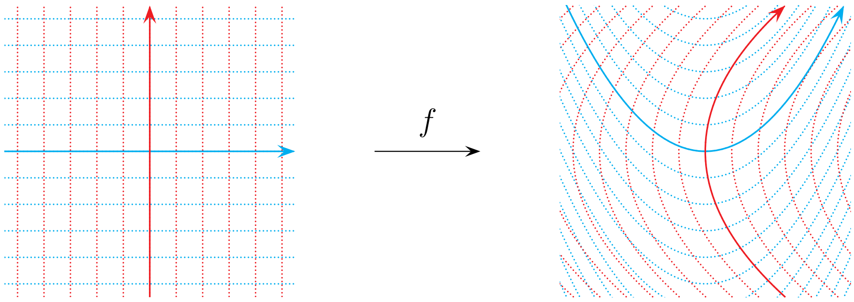
(a) $\underbrace{\sin(v+w)}_{f(v+w)} \neq \underbrace{\sin(v) + \sin(w)}_{f(v)+f(w)}$

(b) $\underbrace{\sin(\alpha\, v)}_{f(\alpha\, v)} \neq \underbrace{\alpha\, \sin(v)}_{\alpha\, f(v)}$

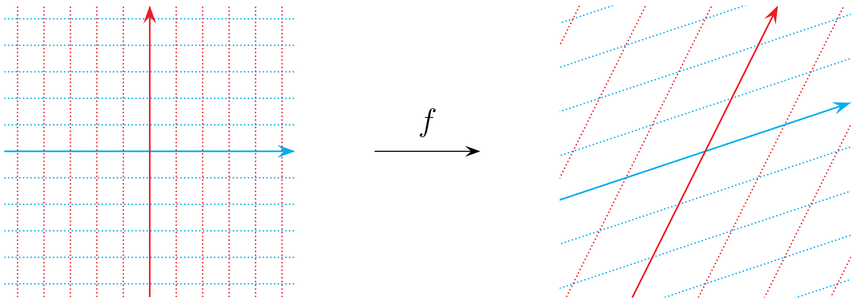
Remarque : Toute fonction linéaire $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de la forme $f(x) = a\, x$.

Voici quelques exemples de transformations du plan :

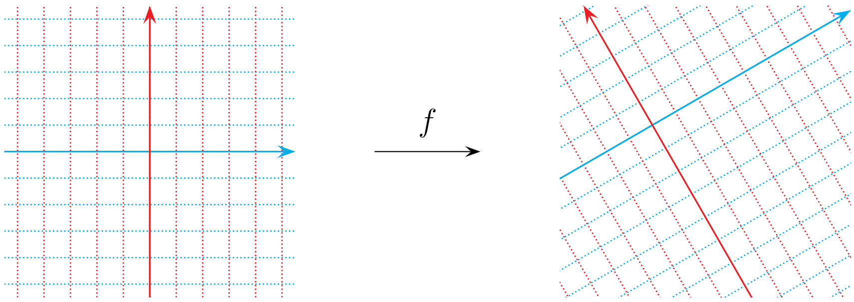
1)



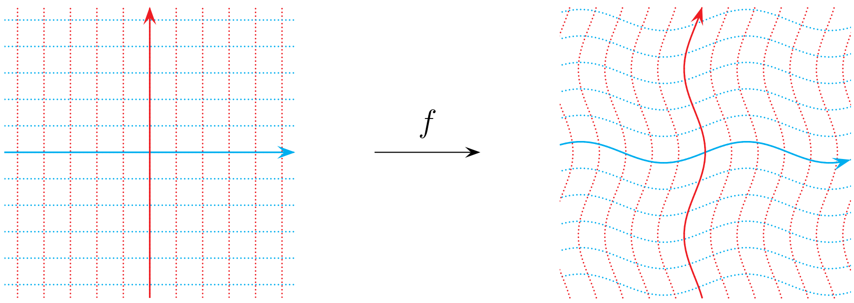
2)



3)



4)



Dans le plan, on reconnaît les applications linéaires aux mêmes critères : elles transforment les lignes droites en lignes droites et laissent fixe l'origine.

Seules les applications 2) et 3) transforment les lignes droites en lignes droites. Les applications 1), 2) et 4) laissent fixe l'origine, mais non l'application 3). C'est pourquoi, il n'y a que l'application 2) qui est linéaire.

D'un point de vue algébrique, une application linéaire f satisfait les propriétés :

(a) $f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})$ (b) $f(\alpha\,\boldsymbol{v}) = \alpha\, f(\boldsymbol{v})$

quels que soient les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ et le coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.1 La deuxième application est définie par $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\,x+y\\x+2\,y\end{pmatrix}$.

(a) i. $$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix}3\,(v_1+w_1)+(v_2+w_2)\\(v_1+w_1)+2\,(v_2+w_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\,v_1+3\,w_1+v_2+w_2\\v_1+w_1+2\,v_2+2\,w_2\end{pmatrix}$$

ii. $$f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{w}) = f\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\,v_1+v_2\\v_1+2\,v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\,w_1+w_2\\w_1+2\,w_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\,v_1+v_2+3\,w_1+w_2\\v_1+2\,v_2+w_1+2\,w_2\end{pmatrix}$$

Puisque les deux résultats sont égaux, on a que $f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{w})$.

(b) i. $$f(\alpha\,\boldsymbol{v}) = f\left(\alpha\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\alpha\,v_1\\\alpha\,v_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\,\alpha\,v_1+\alpha\,v_2\\\alpha\,v_1+2\,\alpha\,v_2\end{pmatrix}$$

ii. $$\alpha\,f(\boldsymbol{v}) = \alpha\,f\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix}3\,v_1+v_2\\v_1+2\,v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\,(3\,v_1+v_2)\\\alpha\,(v_1+2\,v_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\,\alpha\,v_1+\alpha\,v_2\\\alpha\,v_1+2\,\alpha\,v_2\end{pmatrix}$$

Comme les résultats sont identiques, on a que $f(\alpha\,\boldsymbol{v}) = \alpha\,f(\boldsymbol{v})$.

Exemple 3.2 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = x\,y$ est-elle linéaire ?

(a) i. $$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{pmatrix}\right)$$
$$= (v_1+w_1)\,(v_2+w_2) = v_1\,v_2+v_1\,w_2+w_1\,v_2+w_1\,w_2$$

ii. $$f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{w}) = f\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\right) = v_1\,v_2+w_1\,w_2$$

La première propriété n'est pas vérifiée : $f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \neq f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{w})$.

Inutile de tester la seconde propriété $f(\alpha\,\boldsymbol{v}) = \alpha\,f(\boldsymbol{v})$: si l'une des propriétés n'est pas satisfaite, on peut conclure que l'application n'est pas linéaire.

3.1 Les applications suivantes $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (donner les valeurs de m et de n) sont-elles linéaires ?

1) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+y\\x\end{pmatrix}$

2) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+1\\2\,y\\x+y\end{pmatrix}$

3) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = 2\,x-3\,y+4\,z$

4) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\sin(x)\\y\end{pmatrix}$

5) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x^2\\x+y\end{pmatrix}$

6) $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\x\\2\,x\end{pmatrix}$

Remarque : Il est en fait très facile d'identifier les applications linéaires $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Il suffit que chaque composante soit une combinaison linéaire :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,m}\,x_m \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,m}\,x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \ldots + a_{n,m}\,x_m \end{pmatrix}$$

On constate qu'à l'exercice 3.1, les fonctions des questions 1), 3) et 6) satisfont bien ce critère, tandis qu'aux questions 2), 4) et 5), c'est toujours la première composante (respectivement $x+1$, $\sin(x)$ et x^2) qui pose problème.

3.2 Sans effectuer le moindre calcul, déterminer immédiatement si les applications suivantes sont linéaires.

1) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7\,x + 2\,y + z \\ 3\,x - 11\,y + 2\,z \end{pmatrix}$ 2) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\,y + 3\,x + z \\ x + 2\,y^2 + 3\,z \end{pmatrix}$

3) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2\,y + 3\,z + 1 \\ 2\,y - 3\,x + z \end{pmatrix}$ 4) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

Proposition 3.1 *Une application linéaire f préserve les combinaisons linéaires :*

$$f(\alpha_1\,\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\,\boldsymbol{v_2} + \ldots + \alpha_n\,\boldsymbol{v_n}) = \alpha_1\,f(\boldsymbol{v_1}) + \alpha_2\,f(\boldsymbol{v_2}) + \ldots + \alpha_n\,f(\boldsymbol{v_n})$$

Preuve :
$$\begin{aligned} f(\alpha_1\,\boldsymbol{v_1} + \alpha_2\,\boldsymbol{v_2} + \ldots + \alpha_n\,\boldsymbol{v_n}) &\overset{\text{propriété (a)}}{=} f(\alpha_1\,\boldsymbol{v_1}) + f(\alpha_2\,\boldsymbol{v_2}) + \ldots + f(\alpha_n\,\boldsymbol{v_n}) \\ &\overset{\text{propriété (b)}}{=} \alpha_1\,f(\boldsymbol{v_1}) + \alpha_2\,f(\boldsymbol{v_2}) + \ldots + \alpha_n\,f(\boldsymbol{v_n}) \end{aligned}$$

Exemple 3.3 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3\,x + y \\ x + 2\,y \end{pmatrix}$.

Soient $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et le vecteur $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calculons les images des vecteurs de la base canonique :

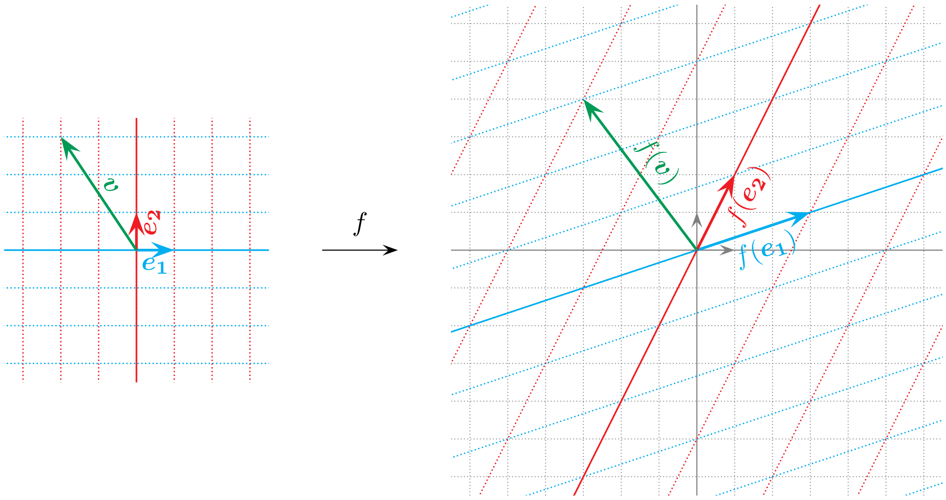
$$f(\boldsymbol{e_1}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \\ 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$f(\boldsymbol{e_2}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 1 \\ 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous avons à présent deux façons de trouver l'image du vecteur $\boldsymbol{v}$:

1) On peut calculer, comme ci-dessus, en utilisant directement l'application f :

$$f(\boldsymbol{v}) = f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 3 \\ -2 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Sur le graphique ci-dessous, cela revient à constater que, dans le quadrillage grisé, le vecteur $f(\boldsymbol{v})$ correspond à 3 carrés à gauche et 4 carrés vers le haut.



2) On peut mettre à profit la combinaison linéaire $\boldsymbol{v} = -2\,\boldsymbol{e_1} + 3\,\boldsymbol{e_2}$:

$$f(\boldsymbol{v}) = f(-2\,\boldsymbol{e_1} + 3\,\boldsymbol{e_2}) = -2\,f(\boldsymbol{e_1}) + 3\,f(\boldsymbol{e_2}) = -2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Sur le graphique, on observe que, dans le quadrillage coloré, le vecteur $f(\boldsymbol{v})$ correspond à -2 flèches bleues $f(\boldsymbol{e_1})$ et 3 flèches rouges $f(\boldsymbol{e_2})$.

Il ne reste plus qu'à terminer le calcul pour trouver le résultat :

$$f(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}-2\cdot 3 + 3\cdot 1\\-2\cdot 1 + 3\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

3.3 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire. Sachant que

$$f(\boldsymbol{e_1}) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{e_2}) = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

on demande de calculer :

1) $f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ 2) $f\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right)$ 3) $f\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)$

3.4 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $f(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{w_1}$ et $f(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{w_2}$

$$\text{où} \quad \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{w_2} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

On demande de calculer :

1) $f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ 2) $f\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right)$ 3) $f\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)$

Matrice associée à une application linéaire

Exemple 3.4 Revenons à la seconde méthode de l'exemple 3.3.
Supposons que tout ce que l'on connaisse d'une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soient les images des vecteurs de la base canonique :

$$f(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous est-il possible de savoir comment a été définie l'application linéaire f ?
Pour cela, il faut déterminer l'image d'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ quelconque :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\,\boldsymbol{e_1} + y\,\boldsymbol{e_2}) = x\,f(\boldsymbol{e_1}) + y\,f(\boldsymbol{e_2}) \\ &= x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,x + 1\,y \\ 1\,x + 2\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate ainsi que l'application linéaire f est entièrement déterminée, sitôt que l'on connaît les images $f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_2})$ des vecteurs de la base canonique.
Résumons cette information sous la forme d'une matrice, dont les colonnes sont constituées des images $f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_2})$ des vecteurs de la base canonique :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3\,x + 1\,y \\ 1\,x + 2\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}}_{f(e_1)} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}}_{f(e_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à l'application linéaire f relativement à la base canonique $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$. En posant $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on peut écrire :

$$f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$$

ce qui ressemble considérablement à l'écriture d'une fonction linéaire, rappelée à la remarque du bas de la page 3.1.

Exemple 3.5 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que

$$f(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'application linéaire f et l'écrire sous la forme $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$.

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\,\boldsymbol{e_1} + y\,\boldsymbol{e_2}) = x\,f(\boldsymbol{e_1}) + y\,f(\boldsymbol{e_2}) = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\,x + 2\,y \\ -1\,x + 1\,y \\ 2\,x - 1\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}}_{f(e_1)} & \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}}_{f(e_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On prêtera attention à ce que la matrice associée à f possède :

(a) 2 colonnes, car l'espace de départ $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 ;

(b) 3 lignes, parce que l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

Plus généralement, on a vu, à la remarque du haut de la page 3.4, que toute application linéaire $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est de la forme :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,m}\,x_m \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,m}\,x_m \\ \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \ldots + a_{n,m}\,x_m \end{pmatrix}$$

que l'on peut écrire à l'aide d'une matrice à m colonnes et n lignes :

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \\ \underbrace{a_{n,1}}_{f(\boldsymbol{e_1})} & \underbrace{a_{n,2}}_{f(\boldsymbol{e_2})} & \ldots & \underbrace{a_{n,m}}_{f(\boldsymbol{e_m})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

ou de façon encore plus condensée : $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$.

À l'inverse, n'importe quelle matrice A définit l'application linéaire $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$.

Exemple 3.6 Quelle application linéaire définit la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Vu que la matrice A possède 3 colonnes et 2 lignes, on sait que $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \underbrace{2}_{f(\boldsymbol{e_1})} & \underbrace{1}_{f(\boldsymbol{e_2})} & \underbrace{3}_{f(\boldsymbol{e_3})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,x - 1\,y + 2\,z \\ 2\,x + 1\,y + 3\,z \end{pmatrix}$$

3.5 Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que

$$f(\boldsymbol{e_1}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(\boldsymbol{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(\boldsymbol{e_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'application linéaire f et l'écrire sous la forme $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$.

3.6 Quelle application linéaire, dont on précisera les espaces de départ et d'arrivée, définissent les matrices suivantes ?

1) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.7 Relativement à la base canonique, quelle matrice est associée aux applications linéaires suivantes ?

1) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2\,z \end{pmatrix}$ 2) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix}$ 4) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2\,y + 3\,z \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z \\ 7\,x + 8\,y + 9\,z \end{pmatrix}$

3.8 Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que

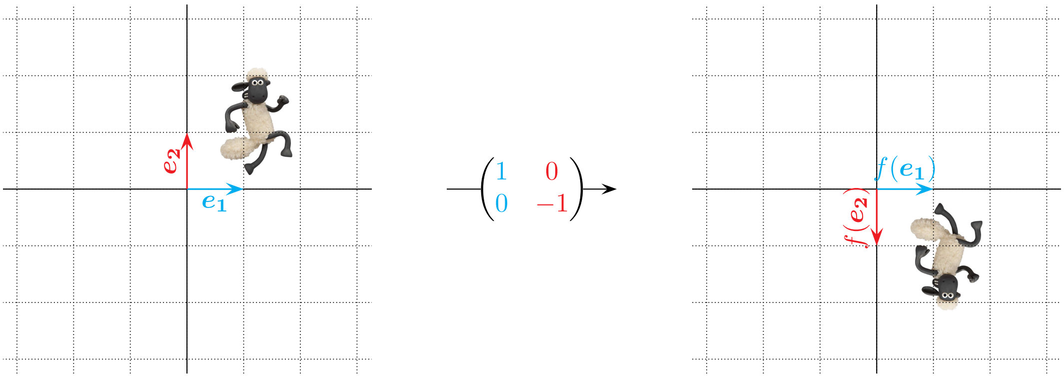
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice A telle que $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$.

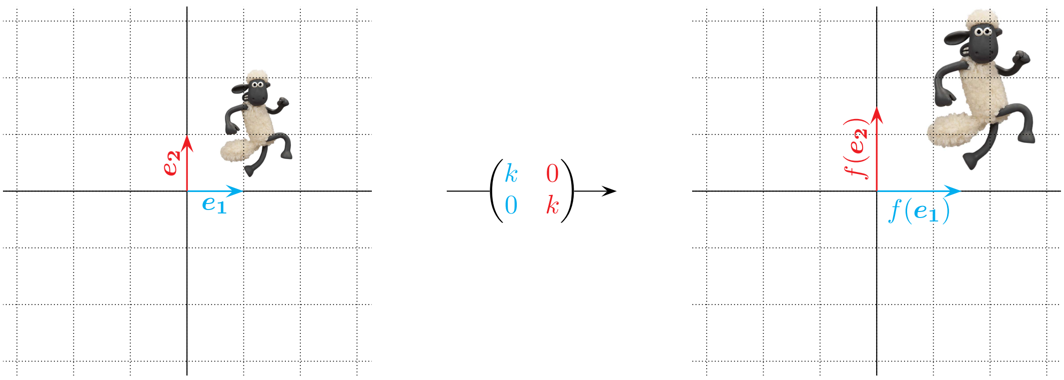
Quelques applications linéaires usuelles du plan

Exemple 3.7 Voici les matrices, relativement à la base canonique, associées à des transformations géométriques usuelles.

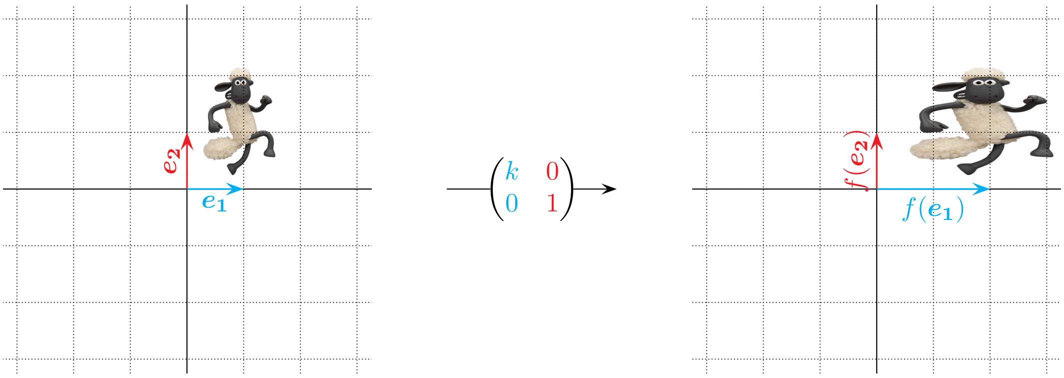
Symétrie orthogonale par rapport à l'axe horizontal



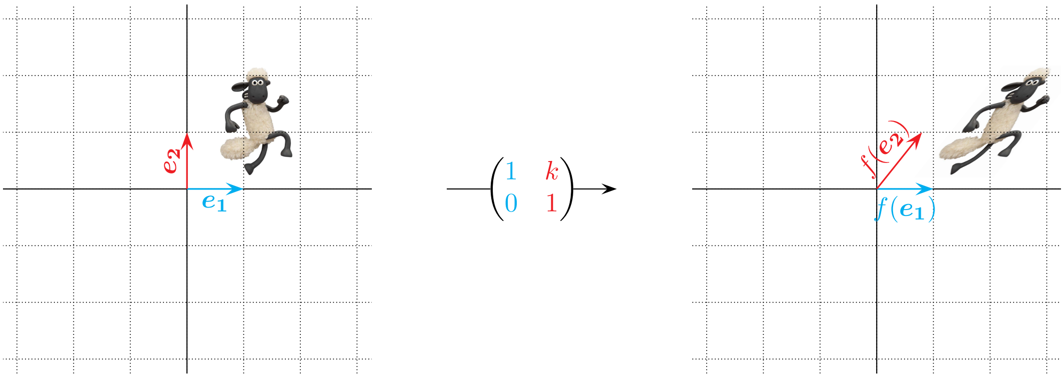
Homothétie de rapport k centrée en l'origine



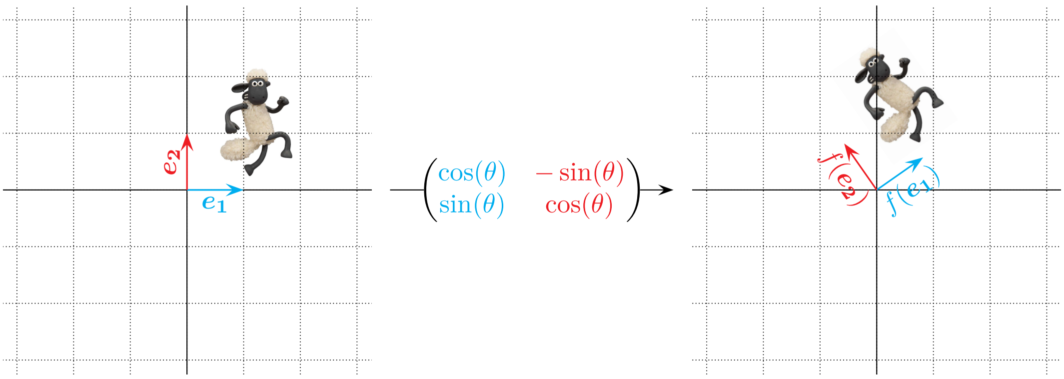
Dilatation horizontale de rapport k



Cisaillement horizontal de facteur k

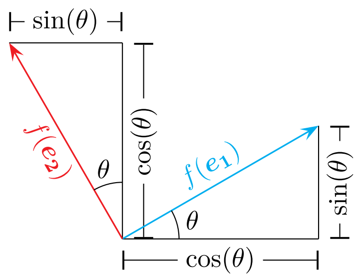


Rotation d'angle θ autour de l'origine



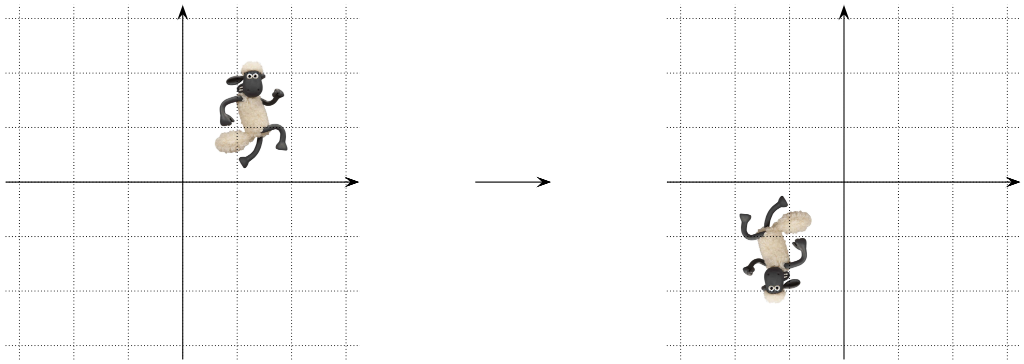
La figure ci-contre illustre comment appliquer les règles de trigonométrie du triangle rectangle pour obtenir :

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

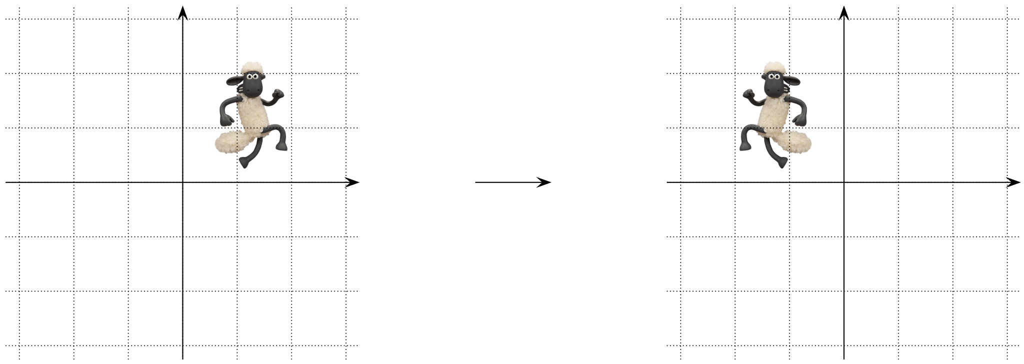


3.9 Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes :

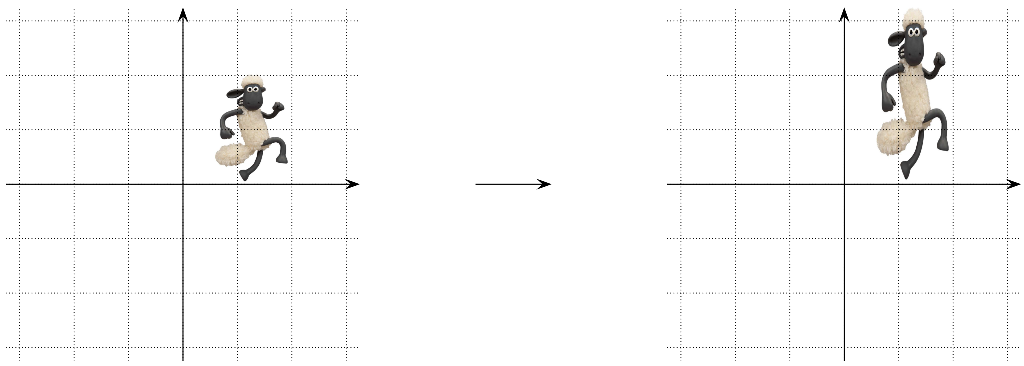
1) Symétrie centrale par rapport à l'origine



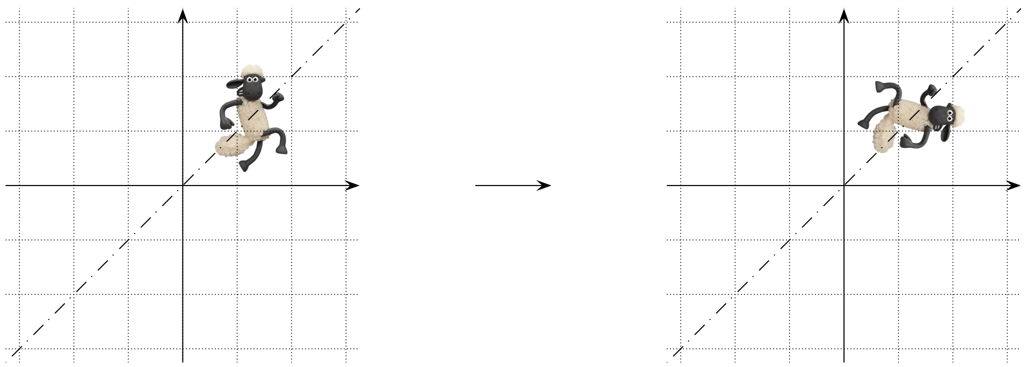
2) Symétrie orthogonale par rapport à l'axe vertical



3) Dilatation verticale de rapport k



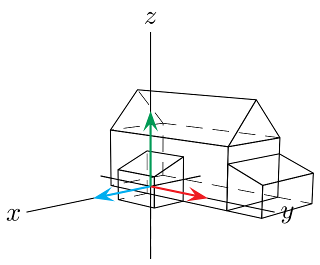
4) Symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$



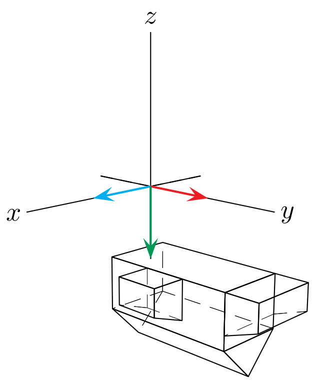
Quelques applications linéaires usuelles de l'espace

Exemple 3.8 Voici les matrices, relativement à la base canonique, associées à des transformations géométriques usuelles.

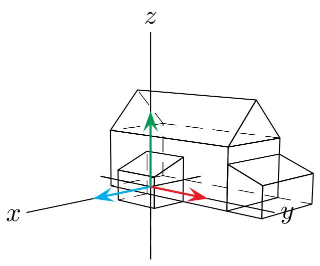
Symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathbf{O}xy$



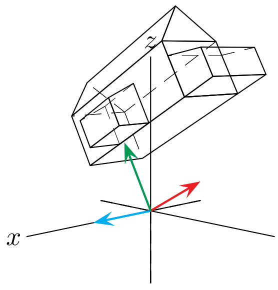
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$



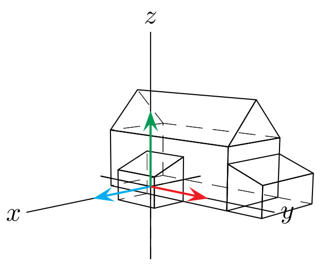
Rotation d'angle $\boldsymbol{\theta}$ autour de l'axe $\mathbf{O}x$



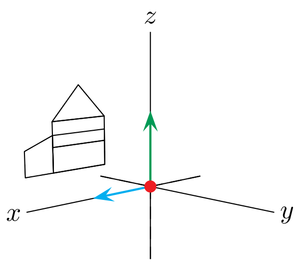
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \longrightarrow$$



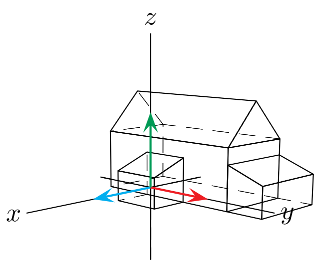
Projection orthogonale sur le plan $\mathbf{O}xz$



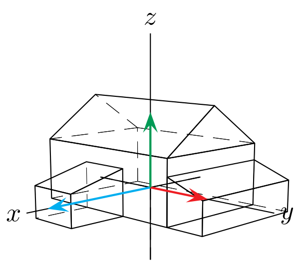
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$



Dilatation de direction $\mathbf{O}x$ de rapport $\boldsymbol{k}$

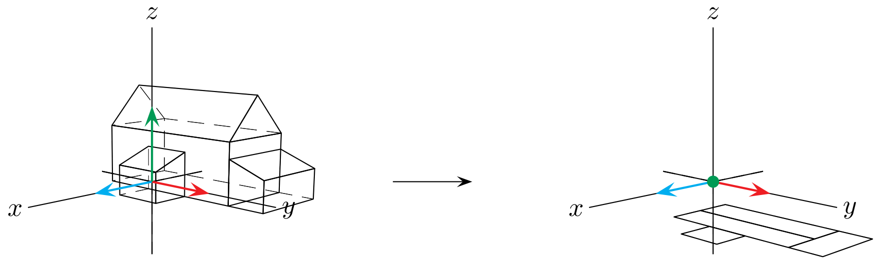


$$\longrightarrow \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

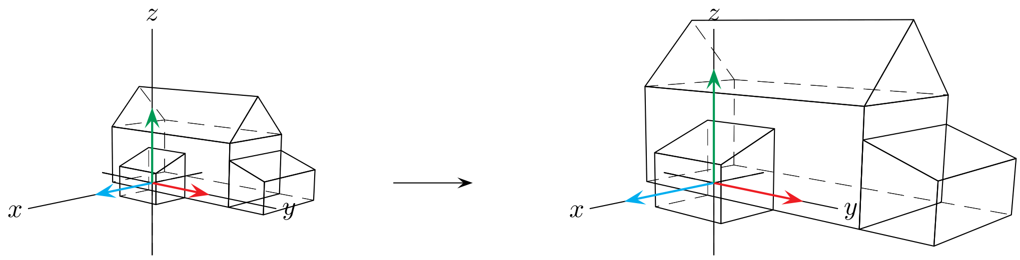


3.10 Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes :

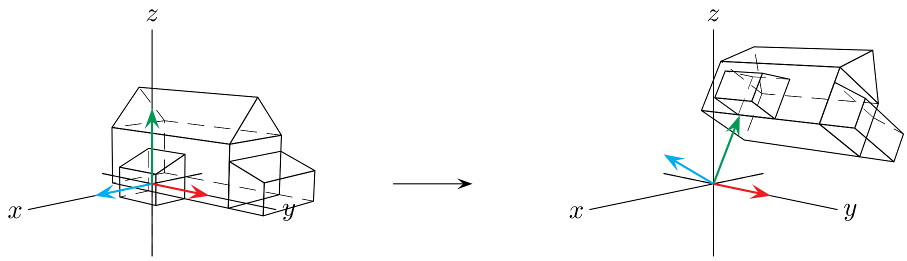
1) Projection orthogonale sur le plan Oxy



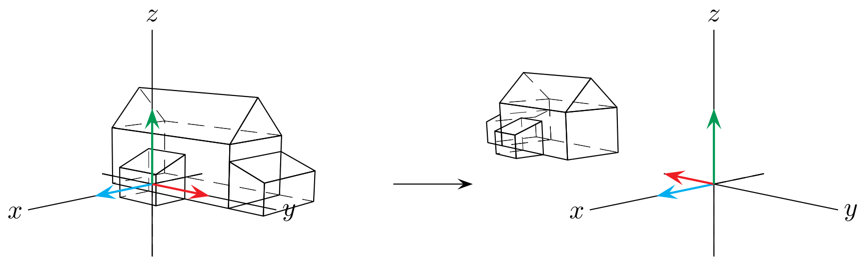
2) Homothétie de rapport k centrée en l'origine



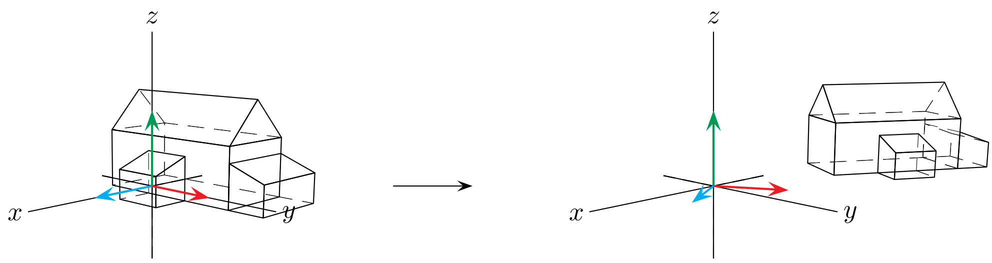
3) Rotation d'angle θ autour de l'axe Oy



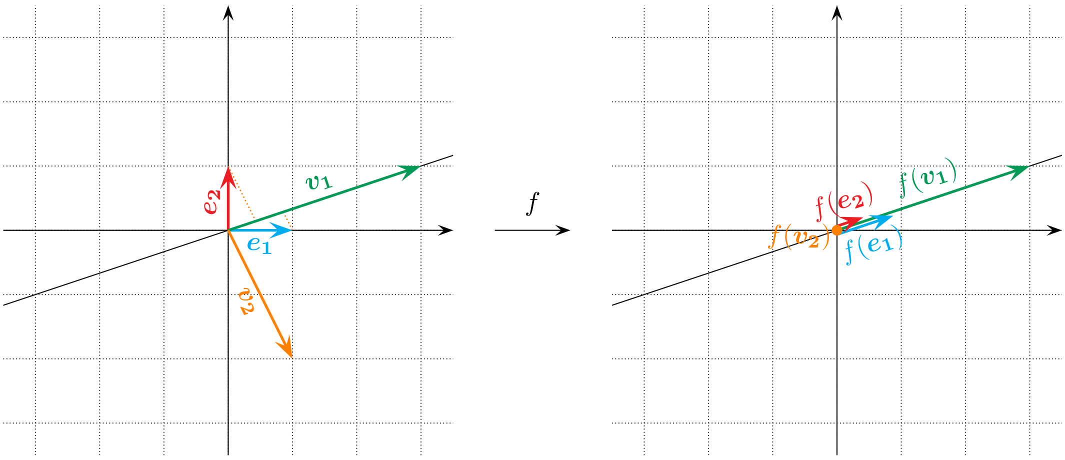
4) Symétrie orthogonale par rapport au plan Oxz



5) Rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe Oz



Exemple 3.9 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sur la droite d'équation $x - 3\,y = 0$. Relativement à la base canonique, quelle est la matrice associée à f ?



L'équation $x - 3\,y = 0$ admet x comme pivot et y comme variable libre, d'où les solutions : $\begin{cases} x = 3\,\alpha \\ y = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les images des vecteurs $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont évidentes :

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{v_1} \quad \text{et} \quad f(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{0}$$

Pour déterminer les images $f(\boldsymbol{e_1})$ et $f(\boldsymbol{e_2})$, il nous faut exprimer les vecteurs $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$ et $\boldsymbol{v_2}$.
Pour éviter des calculs répétitifs, traitons le cas général :

$$\alpha\,\boldsymbol{v_1} + \beta\,\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3\,\alpha + 1\,\beta = x \\ 1\,\alpha - 2\,\beta = y \end{cases}$$

Résolvons ce système en échelonnant et réduisant sa matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_2 \to 3\,\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x \\ 0 & -7 & -x + 3\,y \end{array}\right) \overset{\mathrm{L}_1 \to 7\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow}$$

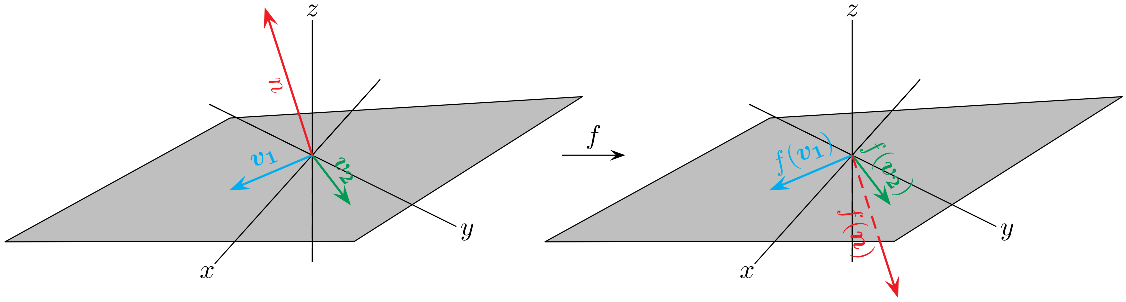
$$\left(\begin{array}{cc|c} 21 & 0 & 6\,x + 3\,y \\ 0 & -7 & -x + 3\,y \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{L}_1 \to 1/21\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \to -1/7\,\mathrm{L}_2}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2\,x+y}{7} \\ 0 & 1 & \frac{x-3\,y}{7} \end{array}\right)$$

Grâce à sa linéarité, on détermine l'application linéaire f :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f\left(\tfrac{2\,x+y}{7}\,\boldsymbol{v_1} + \tfrac{x-3\,y}{7}\,\boldsymbol{v_2}\right) = \tfrac{2\,x+y}{7}\,f(\boldsymbol{v_1}) + \tfrac{x-3\,y}{7}\,f(\boldsymbol{v_2}) \\ &= \tfrac{2\,x+y}{7}\,\boldsymbol{v_1} + \tfrac{x-3\,y}{7}\,\boldsymbol{0} = \tfrac{2\,x+y}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{x-3\,y}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7}\,x + \frac{3}{7}\,y \\ \frac{2}{7}\,x + \frac{1}{7}\,y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en tire aussitôt la matrice associée à f : $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Exemple 3.10 Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la symétrie orthogonale relativement au plan d'équation $x+2\,y-3\,z=0$. Dans la base canonique, quelle est la matrice associée à f ?



Comme y et z sont des variables libres, l'équation $x+2\,y-3\,z=0$ a pour solutions : $\begin{cases} x = -2\,\alpha + 3\,\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les images des vecteurs directeurs $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et du vecteur normal $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ du plan $x+2\,y-3\,z=0$ sont évidentes :

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{v_1} \qquad f(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{v_2} \qquad f(\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{n}$$

Pour déterminer l'image d'un vecteur quelconque, il faut d'abord l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{n}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2\,\alpha + 3\,\beta + 1\,\gamma = x \\ 1\,\alpha + 0\,\beta + 2\,\gamma = y \\ 0\,\alpha + 1\,\beta - 3\,\gamma = z \end{cases}$$

Écrivons ce système sous la forme de sa matrice augmentée et réduisons-la :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & x \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & -3 & z \end{array}\right) \xRightarrow{L_2 \to 2\,L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 3 & 5 & x+2\,y \\ 0 & 1 & -3 & z \end{array}\right) \xRightarrow{L_3 \to 3\,L_3 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 3 & 5 & x+2\,y \\ 0 & 0 & -14 & -x-2\,y+3\,z \end{array}\right) \xRightarrow[L_2 \to 14\,L_2 + 5\,L_3]{L_1 \to 14\,L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -28 & 42 & 0 & 13\,x-2\,y+3\,z \\ 0 & 42 & 0 & 9\,x+18\,y+15\,z \\ 0 & 0 & -14 & -x-2\,y+3\,z \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -28 & 0 & 0 & 4\,x-20\,y-12\,z \\ 0 & 42 & 0 & 9\,x+18\,y+15\,z \\ 0 & 0 & -14 & -x-2\,y+3\,z \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{L_1 \to -1/28\,L_1 \\ L_2 \to 1/42\,L_2 \\ L_3 \to -1/14\,L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-x+5\,y+3\,z}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3\,x+6\,y+5\,z}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x+2\,y-3\,z}{14} \end{array}\right)$$

Nous pouvons à présent déterminer l'application linéaire f :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f\left(\tfrac{-x+5\,y+3\,z}{7}\,\boldsymbol{v_1} + \tfrac{3\,x+6\,y+5\,z}{14}\,\boldsymbol{v_2} + \tfrac{x+2\,y-3\,z}{14}\,\boldsymbol{n}\right)$$

$$= \frac{-x+5\,y+3\,z}{7}\,\underbrace{f(\boldsymbol{v_1})}_{\boldsymbol{v_1}} + \frac{3\,x+6\,y+5\,z}{14}\,\underbrace{f(\boldsymbol{v_2})}_{\boldsymbol{v_2}} + \frac{x+2\,y-3\,z}{14}\,\underbrace{f(\boldsymbol{n})}_{-\boldsymbol{n}}$$

$$= \frac{-x+5\,y+3\,z}{7}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{3\,x+6\,y+5\,z}{14}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{x+2\,y-3\,z}{14}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{6}{7}\,x-\frac{2}{7}\,y+\frac{3}{7}\,z\\ -\frac{2}{7}\,x+\frac{3}{7}\,y+\frac{6}{7}\,z\\ \frac{3}{7}\,x+\frac{6}{7}\,y-\frac{2}{7}\,z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7}\\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7}\\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

3.11 Déterminer la matrice, relativement à la base canonique, associée à la projection orthogonale sur le plan d'équation $x+y+z=0$.

3.12 Déterminer la matrice, relativement à la base canonique, associée à la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $2\,x-3\,y+z=0$.

3.13 Déterminer la matrice, relativement à la base canonique, associée à la projection sur le plan d'équation $x+y+z=0$ parallèlement à la droite $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$.

Réponses

3.1

1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	oui	2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	non
3) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	oui	4) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	non
5) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	non	6) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	oui

3.2

1) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	oui	2) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	non
3) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	non	4) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$	oui

3.3 1) $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}7\\2\\-3\end{pmatrix}$

3.4 1) $\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}-9\\7\end{pmatrix}$

3.5 $$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\,x+2\,z\\2\,y-z\\-x+5\,z\\2\,y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\0 & 2 & -1\\-1 & 0 & 5\\0 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

3.6 1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\,x + 3\,y$

4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 3\,x \end{pmatrix}$

3.7 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

3.8 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 37 & 17 & 11 \\ 17 & 7 & 5 \\ 11 & 14 & 6 \end{pmatrix}$

3.9 1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.10 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.11 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3.12 $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

3.13 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$