3.11 Comme y et z sont des variables libres, l'équation $x+y+z=0$ a pour solutions :
$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les images des vecteurs directeurs $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et du vecteur normal $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ du plan $x+y+z=0$ sont évidentes :

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{v_1} \qquad f(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{v_2} \qquad f(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0}$$

Pour déterminer l'image d'un vecteur quelconque, il faut d'abord l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{n}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -1\,\alpha - 1\,\beta + 1\,\gamma = x \\ 1\,\alpha + 0\,\beta + 1\,\gamma = y \\ 0\,\alpha + 1\,\beta + 1\,\gamma = z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 + L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 3 & x+y+z \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 3\,L_1 - L_3 \\ L_2 \to 3\,L_2 - 2\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 0 & 2\,x - y - z \\ 0 & -3 & 0 & x + y - 2\,z \\ 0 & 0 & 3 & x+y+z \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & x - 2\,y + z \\ 0 & -3 & 0 & x + y - 2\,z \\ 0 & 0 & 3 & x+y+z \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to -1/3\,L_1 \\ L_2 \to -1/3\,L_2 \\ L_3 \to 1/3\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-x+2\,y-z}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-x-y+2\,z}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x+y+z}{3} \end{array}\right)$$

Nous pouvons à présent déterminer l'application linéaire f :

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= f\left(\tfrac{-x+2\,y-z}{3}\,\boldsymbol{v_1} + \tfrac{-x-y+2\,z}{3}\,\boldsymbol{v_2} + \tfrac{x+y+z}{3}\,\boldsymbol{n}\right) \\
&= \tfrac{-x+2\,y-z}{3}\,\underbrace{f(\boldsymbol{v_1})}_{\boldsymbol{v_1}} + \tfrac{-x-y+2\,z}{3}\,\underbrace{f(\boldsymbol{v_2})}_{\boldsymbol{v_2}} + \tfrac{x+y+z}{3}\,\underbrace{f(\boldsymbol{n})}_{\boldsymbol{0}} \\
&= \tfrac{-x+2\,y-z}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{-x-y+2\,z}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{x+y+z}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y - \frac{1}{3}\,z \\ -\frac{1}{3}\,x + \frac{2}{3}\,y - \frac{1}{3}\,z \\ -\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{2}{3}\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$