3.12 Comme y et z sont des variables libres, l'équation $2\,x-3\,y+z=0 \iff x-\frac{3}{2}\,y+\frac{1}{2}\,z=0$ a pour solutions : $\begin{cases} x = \frac{3}{2}\,\alpha - \frac{1}{2}\,\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \frac{1}{2}\,\alpha\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\,\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Les images des vecteurs directeurs $\boldsymbol{v_1}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ et du vecteur normal $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ du plan $2\,x-3\,y+z=0$ sont évidentes :

$$f(\boldsymbol{v_1})=\boldsymbol{v_1} \qquad f(\boldsymbol{v_2})=\boldsymbol{v_2} \qquad f(\boldsymbol{n})=-\boldsymbol{n}$$

Pour déterminer l'image d'un vecteur quelconque, il faut d'abord l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{n}$:

$$\alpha\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3\,\alpha - 1\,\beta + 2\,\gamma = x \\ 2\,\alpha + 0\,\beta - 3\,\gamma = y \\ 0\,\alpha + 2\,\beta + 1\,\gamma = z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & x \\ 2 & 0 & -3 & y \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right) \overset{L_2 \to 3\,L_2 - 2\,L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & x \\ 0 & 2 & -13 & -2\,x+3\,y \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 - L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & x \\ 0 & 2 & -13 & -2\,x+3\,y \\ 0 & 0 & 14 & 2\,x-3\,y+z \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 7\,L_1 - L_3 \\ L_2 \to 14\,L_2 + 13\,L_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 21 & -7 & 0 & 5\,x+3\,y-z \\ 0 & 28 & 0 & -2\,x+3\,y+13\,z \\ 0 & 0 & 14 & 2\,x-3\,y+z \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \to 4\,L_1 + L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 84 & 0 & 0 & 18\,x+15\,y+9\,z \\ 0 & 28 & 0 & -2\,x+3\,y+13\,z \\ 0 & 0 & 14 & 2\,x-3\,y+z \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to 1/84\,L_1 \\ L_2 \to 1/28\,L_2 \\ L_3 \to 1/4\,L_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{6\,x+5\,y+3\,z}{28} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2\,x+3\,y+13\,z}{28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\,x-3\,y+z}{14} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{6\,x+5\,y+3\,z}{28} \\ \beta = \frac{-2\,x+3\,y+13\,z}{28} \\ \gamma = \frac{2\,x-3\,y+z}{14} \end{cases}$$

Nous pouvons à présent déterminer l'application linéaire f :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) &= f\left(\tfrac{6\,x+5\,y+3\,z}{28}\,\boldsymbol{v_1}+\tfrac{-2\,x+3\,y+13\,z}{28}\,\boldsymbol{v_2}+\tfrac{2\,x-3\,y+z}{14}\,\boldsymbol{n}\right) \\ &= \tfrac{6\,x+5\,y+3\,z}{28}\,\underbrace{f(\boldsymbol{v_1})}_{\boldsymbol{v_1}}+\tfrac{-2\,x+3\,y+13\,z}{28}\,\underbrace{f(\boldsymbol{v_2})}_{\boldsymbol{v_2}}+\tfrac{2\,x-3\,y+z}{14}\,\underbrace{f(\boldsymbol{n})}_{-\boldsymbol{n}} \\ &= \tfrac{6\,x+5\,y+3\,z}{28}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+\tfrac{-2\,x+3\,y+13\,z}{28}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\tfrac{4\,x-6\,y+2\,z}{28}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{3}{7}\,x+\frac{6}{7}\,y-\frac{2}{7}\,z \\ \frac{6}{7}\,x-\frac{2}{7}\,y+\frac{3}{7}\,z \\ -\frac{2}{7}\,x+\frac{3}{7}\,y+\frac{6}{7}\,z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \end{aligned}$$