3.13 Comme y et z sont des variables libres, l'équation $x+y+z=0$ a pour solutions :
$$\begin{cases} x = -\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ possède z comme variable libre et admet pour solutions : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les images des vecteurs directeurs $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et du vecteur de la direction de projection $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont évidentes :

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{v_1} \qquad f(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{v_2} \qquad f(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$$

Pour déterminer l'image d'un vecteur quelconque, il faut d'abord l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{d}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -1\,\alpha - 1\,\beta + 0\,\gamma = x \\ 1\,\alpha + 0\,\beta + 0\,\gamma = y \\ 0\,\alpha + 1\,\beta + 1\,\gamma = z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \overset{L_2 \to L_2 + L_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 + L_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & x+y+z \end{array}\right) \overset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -y \\ 0 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & x+y+z \end{array}\right) \overset{\substack{L_1 \to -L_1 \\ L_2 \to -L_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 1 & x+y+z \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = y \\ \beta = -x-y \\ \gamma = x+y+z \end{cases}$$

Nous pouvons à présent déterminer l'application linéaire f :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= f\big(y\,\boldsymbol{v_1} + (-x-y)\,\boldsymbol{v_2} + (x+y+z)\,\boldsymbol{d}\big) \\ &= y\,\underbrace{f(\boldsymbol{v_1})}_{\boldsymbol{v_1}} + (-x-y)\,\underbrace{f(\boldsymbol{v_2})}_{\boldsymbol{v_2}} + (x+y+z)\,\underbrace{f(\boldsymbol{d})}_{\boldsymbol{0}} \\ &= y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-x-y) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x+y+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$