4 Opérations sur les matrices

On dit d'une matrice ayant m lignes et n colonnes qu'elle est de type $m \times n$.

Exemple 4.1 La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \\ 5 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est de type 4×2 : 4 lignes, 2 colonnes.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ est de type 2×4 : 2 lignes, 4 colonnes.

Addition de matrices

L'addition des matrices généralise l'addition des vecteurs.

Exemple 4.2 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & 0+2 & 5+1 \\ 1+3 & 3+5 & 2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

L'addition de deux matrices, qui doivent être du même type $m \times n$, donne également une matrice de type $m \times n$, obtenue en additionnant les coefficients correspondants.

Multiplication par un scalaire

La multiplication d'une matrice par un scalaire généralise aussi la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Exemple 4.3 $7 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 4 & 7 \cdot 0 & 7 \cdot 5 \\ 7 \cdot 1 & 7 \cdot 3 & 7 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 0 & 35 \\ 7 & 21 & 14 \end{pmatrix}$

Multiplier par un scalaire une matrice consiste à multiplier par ce scalaire chacun de ses coefficients.

4.1 Soient les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lorsque c'est possible, calculer :

1) $\mathrm{A} + \mathrm{B}$	2) $\mathrm{B} + \mathrm{A}$	3) $\mathrm{B} + \mathrm{B} + \mathrm{B}$	4) $3\,\mathrm{B}$
5) $3\,\mathrm{A} + 2\,\mathrm{B}$	6) $\mathrm{A} + \mathrm{C}$	7) $\mathrm{C} + \mathrm{B}$	8) $0\,\mathrm{A}$

4.2 Considérons les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 0 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Lorsque c'est possible, calculer :

1) $\mathrm{A} - \mathrm{A}$	2) $3\,\mathrm{A} - 2\,\mathrm{A}$	3) $\mathrm{A} - \mathrm{B}$	4) $\frac{1}{2}\,\mathrm{B}$

L'addition matricielle et la multiplication par un scalaire satisfont les propriétés suivantes, dont la vérification est facile mais fastidieuse :

1) (a) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C}=\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})$
   (b) $\mathrm{A}+0=0+\mathrm{A}=\mathrm{A}$
   (c) $\mathrm{A}+(-\mathrm{A})=0$
   (d) $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\mathrm{B}+\mathrm{A}$

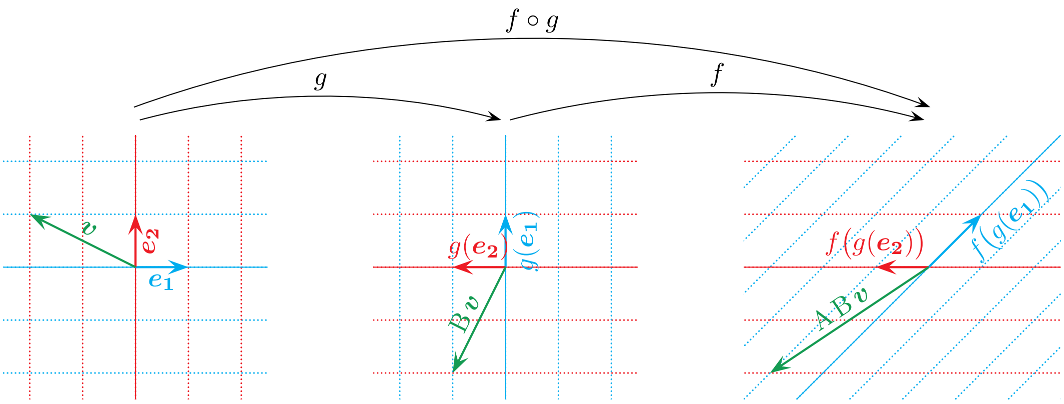
2) (a) $\alpha\,(\beta\,\mathrm{A})=(\alpha\,\beta)\,\mathrm{A}$
   (b) $(\alpha+\beta)\,\mathrm{A}=\alpha\,\mathrm{A}+\beta\,\mathrm{A}$
   (c) $\alpha\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\alpha\,\mathrm{A}+\alpha\,\mathrm{B}$
   (d) $1\,\mathrm{A}=\mathrm{A}$

Multiplication de matrices

La multiplication des matrices est moins immédiate. Elle se présente comme l'opération matricielle correspondant à la composition d'applications linéaires.

Exemple 4.4 Soient f et g deux applications linéaires associées, relativement à la base canonique, aux matrices $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

Comme $(f\circ g)(\boldsymbol{v})=f\big(g(\boldsymbol{v})\big)=\mathrm{A}\,g(\boldsymbol{v})=\mathrm{A}\,\mathrm{B}\,\boldsymbol{v}$, on va définir le produit des matrices A B, pour qu'il donne la matrice associée à l'application linéaire $f\circ g$.



$$(f\circ g)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(f\circ g)(x\,\boldsymbol{e_1}+y\,\boldsymbol{e_2})=f\big(g(x\,\boldsymbol{e_1}+y\,\boldsymbol{e_2})\big)$$
$$=f\big(x\,g(\boldsymbol{e_1})+y\,g(\boldsymbol{e_2})\big)=x\,f\big(g(\boldsymbol{e_1})\big)+y\,f\big(g(\boldsymbol{e_2})\big)$$

Rappelons que $f(\boldsymbol{v})=\mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$ et que $g(\boldsymbol{e_1}),g(\boldsymbol{e_2})$ sont les colonnes de B :

$$=x\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$=x\begin{pmatrix}\overbrace{1\cdot 0+1\cdot 1}^{\text{ligne 1 de A}\,\cdot\,\text{colonne 1 de B}}\\ \underbrace{0\cdot 0+1\cdot 1}_{\text{ligne 2 de A}\,\cdot\,\text{colonne 1 de B}}\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\overbrace{1\cdot(-1)+1\cdot 0}^{\text{ligne 1 de A}\,\cdot\,\text{colonne 2 de B}}\\ \underbrace{0\cdot(-1)+1\cdot 0}_{\text{ligne 2 de A}\,\cdot\,\text{colonne 2 de B}}\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}_{f(g(\boldsymbol{e_1}))}&\underbrace{\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}}_{f(g(\boldsymbol{e_2}))}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Dans la pratique, voici comment procéder pour calculer le produit A B :

ligne 1
colonne 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & * \\ * & * \end{pmatrix} \qquad 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = \boxed{1}$$

ligne 1
colonne 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} \\ * & * \end{pmatrix} \qquad 1 \cdot -1 + 1 \cdot 0 = \boxed{-1}$$

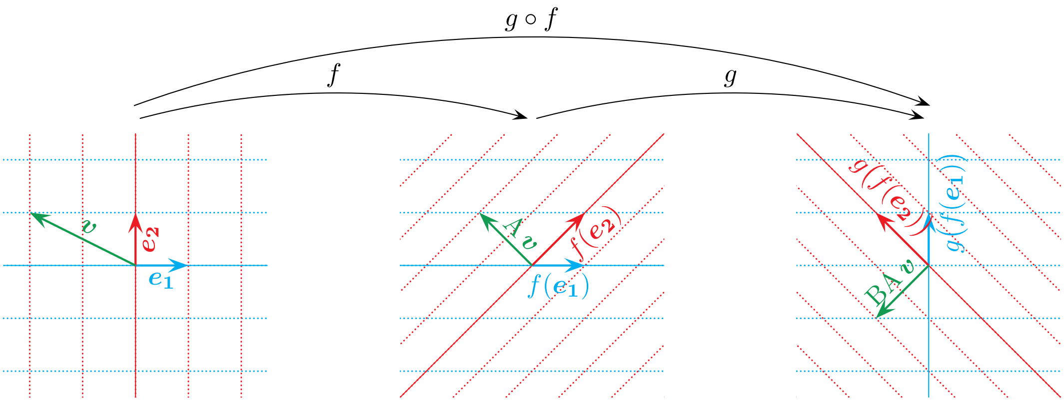
ligne 2
colonne 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \boxed{1} & * \end{pmatrix} \qquad 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = \boxed{1}$$

ligne 2
colonne 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} \qquad 0 \cdot -1 + 1 \cdot 0 = \boxed{0}$$

Insistons sur le fait que le produit matriciel n'est pas commutatif, c'est-à-dire A B $\neq$ B A, car la composition des fonctions ne l'est pas non plus : $f \circ g \neq g \circ f$.



Calculons le produit B A avec la méthode ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & * \\ * & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-1} \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \boxed{1} & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

On a trouvé que A B $= \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}}_{f(g(e_1))} & \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}}_{f(g(e_2))} \end{pmatrix}$, mais que B A $= \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}}_{g(f(e_1))} & \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}}_{g(f(e_2))} \end{pmatrix}$.

Généralisons la démarche précédente, en considérant la composition $f \circ g$ des applications linéaires f et g dont les matrices, relativement à la base canonique, sont désignées par A et B.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & \mathbb{R}^{p} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^{m} \end{tikzcd}$$

Rappelons que la matrice d'une application linéaire a pour nombre de colonnes la dimension de l'espace de départ, et pour nombre de lignes la dimension de l'espace d'arrivée. Voilà qui détermine clairement le type de chaque matrice :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & & \mathrm{B} & = & \mathrm{A\,B} \\ m \times p & & p \times n & & m \times n \end{array}$$

égaux

taille de AB

On obtient le coefficient du produit A B de la ligne i et de la colonne j en multipliant la ligne i de A par la colonne j de B.

Exemple 4.5 Calculer, si possible, le produit A B avec

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -3 \\ -5 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Pour savoir si la multiplication est possible et quelle sera sa taille, on pose :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & & \mathrm{B} & = & \mathrm{A\,B} \\ 3 \times 4 & & 4 \times 2 & & 3 \times 2 \end{array}$$

égaux

taille de AB

La multiplication est ainsi possible et le résultat sera de type 3×2.

Il ne reste plus qu'à calculer, l'un après l'autre, chaque coefficient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -3 \\ -5 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{19} & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -3 \\ -5 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & \boxed{-16} \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -3 \\ -5 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -16 \\ \boxed{-23} & * \\ * & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -3 \\ -5 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -16 \\ -23 & \boxed{17} \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -3 \\ -5 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -16 \\ -23 & 17 \\ \boxed{-49} & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -3 \\ -5 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -16 \\ -23 & 17 \\ -49 & \boxed{27} \end{pmatrix}$$

On constate, une nouvelle fois, que la multiplication matricielle n'est pas commutative, si l'on tente de calculer le produit B A :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{B} & & \mathrm{A} & = & \mathrm{B\,A} \\ 4 \times 2 & & 3 \times 4 & & \end{array}$$

différents

La multiplication B A est par conséquent impossible.

En revanche, la multiplication matricielle est associative :

$$(\mathrm{A}\,\mathrm{B})\,\mathrm{C} = \mathrm{A}\,(\mathrm{B}\,\mathrm{C})$$

car la composition des fonctions est aussi associative : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

4.3 Calculer, quand cela est possible, les produits A B et B A suivants :

1) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

3) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.4 On donne les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer :

1) A B	2) A C	3) A B + A C
4) B + C	5) A (B + C)	6) A + B
7) A^2	8) B^2	9) $\mathrm{A}^2 + 2\,\mathrm{A}\,\mathrm{B} + \mathrm{B}^2$
10) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2$	11) $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$	12) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})$

4.5 Expliquer pourquoi $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 \neq \mathrm{A}^2 + 2\,\mathrm{A}\,\mathrm{B} + \mathrm{B}^2$ et $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 \neq (\mathrm{A}+\mathrm{B})\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})$.

Matrice identité

4.6 Effectuer les multiplications de matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Que remarque-t-on ?

La matrice identité I est telle que A I = A pour toute matrice A.
Elle correspond à l'application linéaire identité $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ qui laisse inchangé n'importe quel vecteur. Dès lors, sa matrice est très facile à déterminer :

(a) Dans $\mathbb{R}^2$, on a $f(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(\boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où :

$$\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

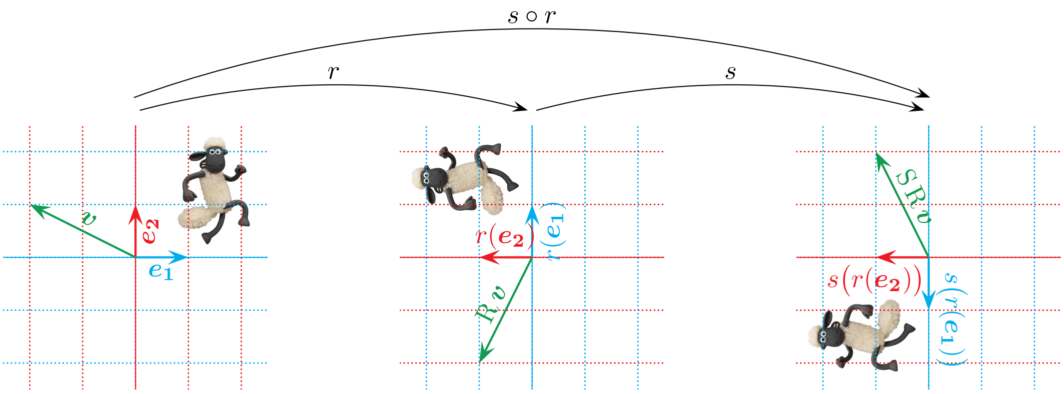
(b) Dans $\mathbb{R}^3$, $f(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(\boldsymbol{e_3}) = \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Dans $\mathbb{R}^n$, on a $f(\boldsymbol{e_1}) = \boldsymbol{e_1}, f(\boldsymbol{e_2}) = \boldsymbol{e_2}, \ldots, f(\boldsymbol{e_n}) = \boldsymbol{e_n}$, si bien que :

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.6 Quelle est la matrice, relativement à la base canonique, associée à la transformation du plan qui opère d'abord une rotation autour de l'origine de 90°, puis effectue une symétrie par rapport à l'axe horizontal Ox ?



La rotation r et la symétrie s sont respectivement associées aux matrices

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On cherche à déterminer la matrice $\mathrm{S}\,\mathrm{R}$ de la composition $s \circ r$:

$$\mathrm{S}\,\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.7 Déterminer la matrice, relativement à la base canonique, associée aux compositions suivantes de transformations du plan :

1) symétrie d'axe $y = x$, suivie par une projection sur l'axe Oy ;
2) rotation de 60°, suivie par une symétrie d'axe Ox, puis encore une homothétie de rapport 2.

4.8 Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

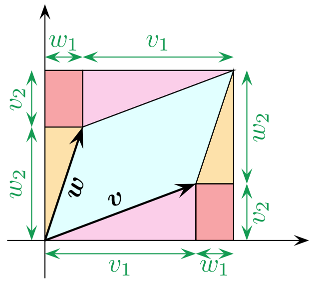
1) Vérifier que $A\,B = A\,C$.

2) Pourquoi ne peut-on pas simplifier par A cette égalité ($B \neq C$) ?

Déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée A de type 2×2 est défini par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = v_1\,w_2 - v_2\,w_1$$



Le déterminant $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$ correspond géométriquement à l'aire orientée du parallélogramme engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.

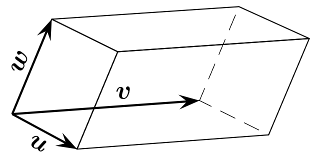
En effet, l'aire du parallélogramme vaut :

$$\underbrace{(v_1 + w_1)\,(v_2 + w_2)}_{v_1\,v_2 + v_1\,w_2 + v_2\,w_1 + w_1\,w_2} - 2 \cdot v_2\,w_1 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,v_1\,v_2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\,w_1\,w_2 = v_1\,w_2 - v_2\,w_1$$

4.9 Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

Le déterminant d'une matrice carrée de type 3×3 s'interprète géométriquement comme le volume orienté du parallélépipède engendré par les vecteurs $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.



Le déterminant d'une matrice carrée A de type 3×3 se définit par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

Exemple 4.7 Illustrons comment s'applique cette définition :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-17) - 5 \cdot 8 + 2 \cdot 15 = -61$$

On dit que le déterminant a été développé sur la première colonne : on a écrit les coefficients de cette colonne (3, 5 et 2), multipliés par les déterminants 2×2 obtenus en supprimant la ligne et la colonne où ils apparaissent.

On notera encore que les coefficients doivent être multipliés en alternance par ± 1, selon le modèle ci-contre.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Il est en réalité possible de développer un déterminant sur n'importe quelle colonne. Recalculons ce déterminant, en le développant sur la deuxième colonne.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot (-3) + 7 \cdot 5 - 6 \cdot 17 = -61
\end{aligned}$$

Mieux encore, il est aussi possible de développer un déterminant sur n'importe quelle ligne. Refaisons le calcul en développant sur la troisième ligne :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 15 - 6 \cdot 17 + 1 \cdot 11 = -61
\end{aligned}$$

4.10 On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$ en développant :

1) sur la deuxième ligne ; 2) sur la troisième colonne.

Le déterminant d'une matrice carrée de type $n \times n$ se calcule en généralisant la méthode utilisée pour une matrice 3×3 : il s'agit de calculer n déterminants de taille $(n-1) \times (n-1)$, en développant sur n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.

Exemple 4.8 Calculons $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Puisque le choix de la colonne ou de la ligne sur laquelle développer nous appartient, autant se simplifier la tâche en choisissant là où il y a le plus de coefficients nuls : c'est manifestement la deuxième colonne.

On aura ainsi seulement deux — au lieu de quatre — déterminants 3×3 à calculer :

$$\det(\mathrm{A}) = -2\begin{vmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix} + 0\cancel{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}} - (-1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix} + 0\cancel{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}}$$

4.11 Terminer le calcul de ce déterminant.

4.12 Calculer le déterminant suivant, en choisissant judicieusement la colonne ou la ligne sur laquelle développer :

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

L'exercice 4.12 permet de réaliser que le déterminant d'une matrice triangulaire est simplement égal au produit de tous les coefficients de sa diagonale.

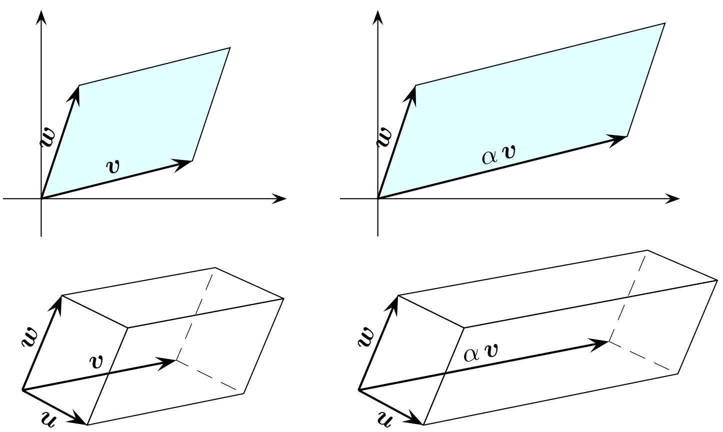
Le problème avec la méthode utilisée jusqu'ici est qu'il faudrait, pour obtenir le déterminant d'une matrice 5×5 quelconque, procéder au calcul de $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ déterminants de taille 2×2. Que c'est fastidieux !

La méthode la plus efficace pour calculer un déterminant consiste à échelonner.

Il faut néanmoins étudier les propriétés du déterminant, car certaines opérations affectent son résultat. On comprendra aisément ces propriétés en examinant comment une modification du déterminant affecte l'aire d'un parallélogramme ou le volume d'un parallélépipède.

Propriétés du déterminant

Si on multiplie tous les éléments d'une colonne par un nombre α, le déterminant est aussi multiplié par α.



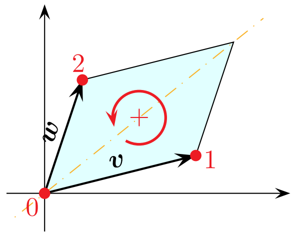
Multiplier l'un des vecteurs par α signifie multiplier l'une des dimensions du parallélogramme ou du parallélépipède par α.

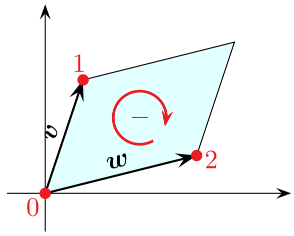
Cela a pour effet de multiplier aussi par α l'aire du parallélogramme ou le volume du parallélépipède.

Si on échange deux colonnes, le déterminant change de signe.

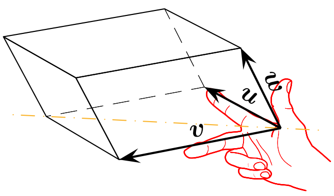
Pour donner un sens géométrique à cette propriété, il convient de comprendre comment une aire ou un volume peuvent être négatifs. En d'autres termes, il s'agit d'expliquer la notion d'aire orientée ou de volume orienté.

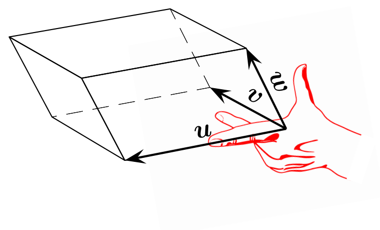
Dans le plan, numérotons 0 l'origine, 1 l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{v}$, et 2 celle du vecteur $\boldsymbol{w}$. L'aire du parallélogramme engendré par $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ est positive si l'on parcourt les sommets 0, 1 et 2 dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, négative dans le cas contraire.





Dans l'espace, pointons l'index dans la direction du vecteur $\boldsymbol{u}$, le majeur dans la direction du vecteur $\boldsymbol{v}$ et le pouce dans la direction du vecteur $\boldsymbol{w}$. S'il faut, pour parvenir à réaliser cette opération, utiliser notre main droite, le volume est positif, tandis qu'il est négatif si l'on doit recourir à notre main gauche.

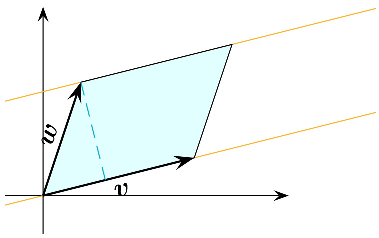


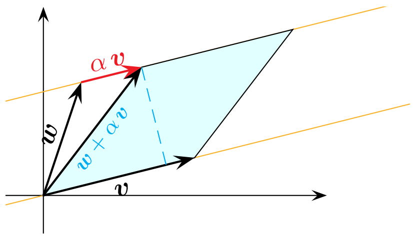


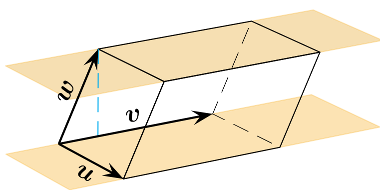
Nous sommes à présent en mesure d'expliquer cette propriété.

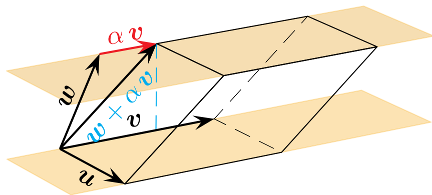
Échanger deux vecteurs revient à opérer une symétrie par rapport à la diagonale du parallélogramme qu'ils engendrent. Or une symétrie renverse l'orientation : dans un miroir, votre main droite apparaît comme votre main gauche.

Ajouter n'importe quel multiple d'une colonne à une autre colonne ne change pas le déterminant.









L'ajout d'un multiple quelconque d'une colonne à une autre ne modifie ni la base ni la hauteur du parallélogramme ou du parallélépipède, si bien que son aire ou son volume demeurent inchangés.

Toutes les propriétés valables pour les colonnes d'un déterminant s'appliquent également à ses lignes :

— *si on multiplie tous les éléments d'une ligne par un nombre α, le déterminant est aussi multiplié par α ;*

— *si on échange deux lignes, le déterminant change de signe ;*

— *ajouter n'importe quel multiple d'une ligne à une autre ligne ne change pas le déterminant.*

Exemple 4.9 Appliquons ces propriétés pour calculer par échelonnement le déterminant de l'exemple 4.8.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

L'échange des colonnes 1 et 2 change le signe du déterminant.

Pour éviter cette modification et maintenir l'égalité, on change le signe devant le déterminant.

$$\overset{L_3 \to 2\,L_3 + L_1}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

La modification $L_3 \to 2\,L_3 + L_1$ signifie deux opérations.

(a) La ligne L_3 est multipliée par 2, ce qui multiplie aussi par 2 le déterminant.
Pour prévenir cette modification et préserver l'égalité, on ajoute le facteur $\frac{1}{2}$ devant le déterminant.

(b) On ajoute la ligne L_1, ce qui n'affecte nullement le déterminant.

$$\overset{\substack{L_3 \to L_3 + 7\,L_2 \\ L_4 \to L_4 + 2\,L_2}}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftrightarrow L_4}{=} +\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_4 \to L_4 - 5\,L_3}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\Big(2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-1)\Big) = 3$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire égale le produit des coefficients de sa diagonale.

4.13 Calculer les déterminants suivants par échelonnement.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 9 & -7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

4.14 Calculer les déterminants suivants :

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

4.15 Calculer en commençant par ajouter à la première ligne toutes les autres lignes :

1) $\begin{vmatrix} x-1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & x-1 \\ -3 & x+2 & -2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & x-2 \\ -2 & x & -2 \end{vmatrix}$

D'autres propriétés du déterminant

La méthode par échelonnement implique la propriété suivante.

Soit A *une matrice de type* $n \times n$.
— *Si* A *possède* n *pivots, alors* $\det(\mathrm{A}) \neq 0$.
— *Si* A *possède moins de* n *pivots, alors* $\det(\mathrm{A}) = 0$.

La composition des applications donne une autre propriété du déterminant.

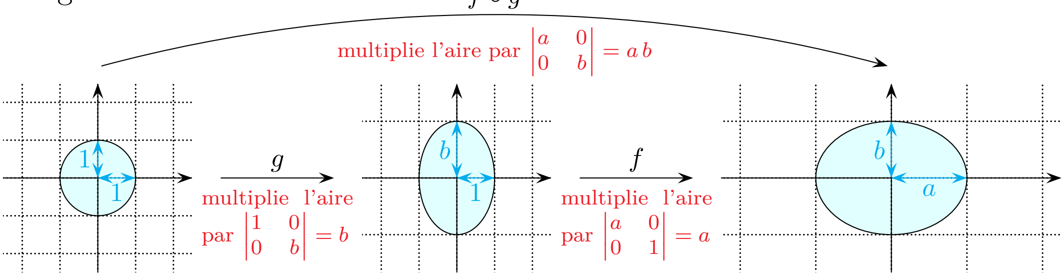
Si A *et* B *sont deux matrices de type* $n \times n$*, alors* $\det(\mathrm{A\,B}) = \det(\mathrm{A})\ \det(\mathrm{B})$.

En considérant les applications linéaires $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$ et $g(\boldsymbol{v}) = \mathrm{B}\,\boldsymbol{v}$, un schéma permet de facilement comprendre cette propriété :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbb{R}^n \arrow[r, "g", "\text{multiplie l'aire/le volume par } \det(\mathrm{B})"'] \arrow[rr, bend left, "f \circ g", "\text{multiplie l'aire/le volume par } \det(\mathrm{A\,B})"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f", "\text{multiplie l'aire/le volume par } \det(\mathrm{A})"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

L'application linéaire $f \circ g$, associée à la matrice $\mathrm{A\,B}$, multiplie l'aire, ou le volume, d'abord par $\det(\mathrm{B})$, puis par $\det(\mathrm{A})$. Donc $\det(\mathrm{A\,B}) = \det(\mathrm{B})\ \det(\mathrm{A})$.
Alors qu'on ne peut pas commuter les matrices ($\mathrm{A\,B} \neq \mathrm{B\,A}$), on peut en revanche commuter les nombres : $\det(\mathrm{B})\ \det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A})\ \det(\mathrm{B})$.

Exemple 4.10 Soients $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la dilatation horizontale de rapport a et $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la dilatation verticale de rapport b.
Appliquons successivement ces transformations au cercle de rayon 1 centré à l'origine.



La composition $f \circ g$ est associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

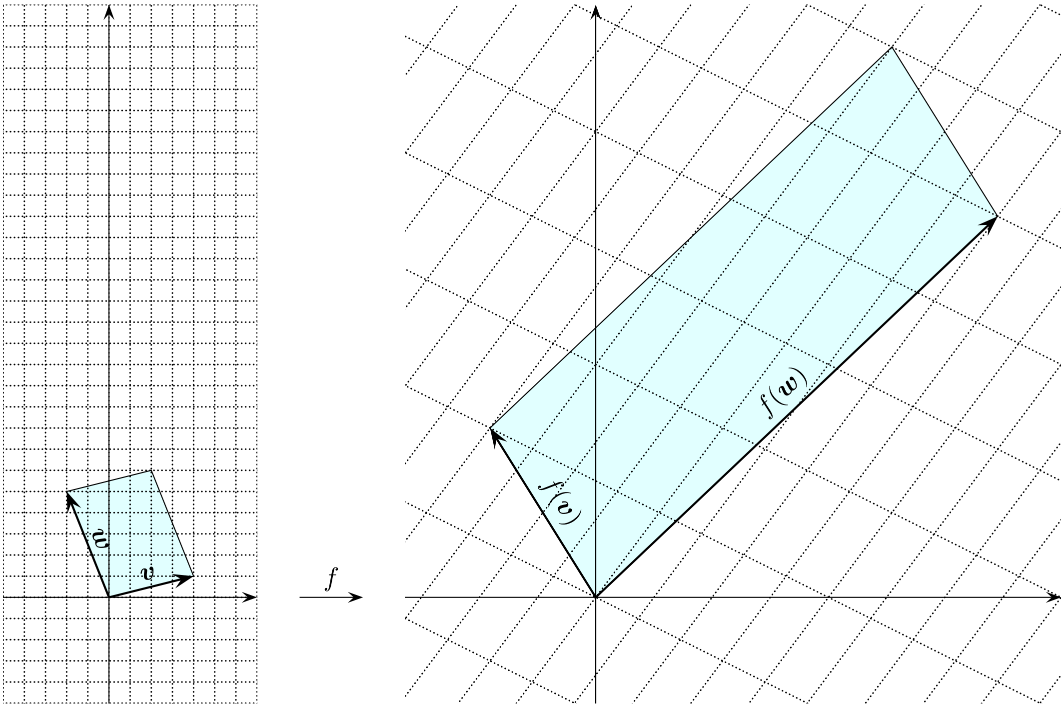
L'aire de l'ellipse de demi-grand axe a et de demi-grand axe b vaut :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \cdot \text{aire du cercle} = (a\,b - 0 \cdot 0) \cdot (\pi \cdot 1^2) = \pi\,a\,b$$

4.16 Soient f l'application linéaire définie par $f(\boldsymbol{v}) = \mathrm{A}\,\boldsymbol{v}$ avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{P}$ le parallélogramme engendré par les vecteurs $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Calculer l'aire orientée de l'image de $\mathcal{P}$ par l'application linéaire f.

Expliquer graphiquement pourquoi elle est négative.



Réponses

4.1 1) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 19 & 3 \end{pmatrix}$ 6) impossible 7) impossible 8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.2 1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 3) impossible 4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ \frac{7}{2} & 5 \end{pmatrix}$

4.3 1) $\mathrm{A\,B} = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 12 \\ 4 & 8 & 14 \end{pmatrix}$ B A n'existe pas 2) $\mathrm{A\,B} = \begin{pmatrix} 32 \end{pmatrix}$ $\mathrm{B\,A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

3) $A\,B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B\,A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.4 1) $\begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 \\ 3 & 11 & 7 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 2 & 17 & 12 \\ -2 & 9 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 2 & 58 & 41 \\ 7 & 37 & 27 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 9 & 50 & 45 \\ 4 & 29 & 25 \\ -2 & 15 & 14 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ 12) $\begin{pmatrix} 7 & -18 & 3 \\ 2 & -11 & 3 \\ 12 & -7 & -4 \end{pmatrix}$

4.7 1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

4.8 1) $A\,B = A\,C = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$ 2) La matrice A n'est pas inversible.

4.9 1) 2 2) 4 3) 0 4) -2

4.10 1) $-3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = -1$

2) $-2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-7) = -1$

4.11 3

4.12 -30

4.13 1) 79 2) 24 3) -5 4) 8 5) 12 6) 178

4.14 1) 27 2) 0 3) 2

4.15 1) $-(x-2)\,(x^2+2\,x-12)$ 2) $-(x-1)\,(x-4)\,(x+2)$

4.16 -242